# PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA, PŘEDNÁŠKA 27. 4. 2020

Doporučená literatura: Likeš J., Machek J.: Matematická statistika. SNTL, Praha 1982.
Anděl J.: Statistické metody. MatfyzPress 2019

## *Úvod do problematiky testování hypotéz*

Statistická hypotéza - tvrzení týkající se rozdělení, z něhož náhodný výběr pochází.
Test statistické hypotézy - postup, kterým ověřujeme platnost dané statistické hypotézy.
Základní typy statistických testů

- testy dobré shody: hypotézy se týkají typu, tvaru rozdělení z něhož náhodný výběr pochází;
- parametrické testy: vycházíme z toho, že náhodný výběr pochází z konkrétního rozdělení a hypotézy se týkají hodnot parametrů tohoto rozdělení;
- neparametrické testy: nevycházíme z konkrétního rozdělení a hypotézy se týkají neparametrických charakteristik (např. mediánu).

Nulová hypotéza (značíme $H_0$)
Alternativní hypotéza (značíme $H_1$)

Poznámky

- Zjednodušeně lze postup při testování hýpotéz popsat následovně:
  Máme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$
  1. Formulujeme hypotézy $H_0, H_1$, zvolíme hladinu testu $\alpha$ (obvykle 0,05/0,01).
  2. Vybereme vhodný statistický test a provedeme ho - vypočteme hodnotu testové statistiky $T = T(X_1, \dots, X_n)$.
  3. Na základě hodnoty testové statistiky $T$ rozhodneme o výsledku testu. V zásadě jsou dvě možnosti - buď nulovou hypotézu $H_0$ zamítneme ve prospěch alternativy $H_1$ (tj. přijmeme $H_1$), nebo nulovou hypotézu $H_0$ nezamítneme. Nezamítnutí $H_0$, ale neznamená její přijetí (potvrzení), ale interpretujeme to jako situaci, kdy získaná data nejsou v rozporu s testovanou hypotézou $H_0$. Důvodem je následující - při rozhodování o platnosti $H_0$, či $H_1$ se můžeme dopustit chyb dvojího druhu:
     - $H_0$ zamítneme ačkoliv platí, tzv. chyba 1. druhu,
     - $H_0$ nezamítneme ačkoliv neplatí, tzv. chyba 2. druhu.

     Viz následující tabulka

| | | Platí | |
|---|---|---|---|
| | | ***H*₀** | ***H*₁** |
| Naše tvrzení | ***H*₀** | OK | chyba 2. druhu |
| | ***H*₁** | chyba 1. druhu | OK |

     Samozřejmou snahou je minimalizovat pravděpodobnosti obou druhu chyb, nicméně naše rozhodnutí opíráme o již realizovaný náhodný výběr daného rozsahu, tudíž nelze libovolně minimalizovat pravděpodobnosti chyb obou druhů současně. Předepisujeme proto pouze pravděpodobnost chyby 1. druhu $\alpha$ (obvykle 0,05, resp. 0,01). Číslo $\alpha$ nazýváme hladina (významnosti) testu. K tomu, abychom přijali $H_0$, museli bychom „mít pod kontrolou“ také pravděpodobnost chyby 2. druhu.

- V rámci testování hypotéz se lze běžně setkat ještě s následujícími pojmy:

- Kritický obor $W$ ... množina hodnot testové statistiky, které vedou k zamítnutí testované hypotézy.
  V tomto kontextu lze psát $\alpha = P(T \in W|H_0)$ ... pst. chyby 1. druhu
  $P(T \notin W|H_1) = 1 - P(T \in W|H_1)$ ... pst. chyby 2. druhu
  Pravděpodobnost $P(T \in W|H_1)$ se obvykle nazývá síla testu/kritického oboru.
- Dnes je ke statistickým výpočtům často využíván speciální statistický software, který pracuje s tzv. p-value. Zjednodušeně řečeno, p-value je minimální hladina významnosti, která ještě vede k zamítnutí $H_0$. Pokud tedy pro námi apriori zvolené $\alpha$ platí p-value $\leq \alpha$ j, tak $H_0$ na hladině $\alpha$ zamítáme, jinak (tj. p-value > $\alpha$) $H_0$ na hladině $\alpha$ nezamítáme.

## *Parametrické testy*

Pro parametrické testy mívají hypotézy obvykle některý z následujících tvarů:

$H_0: \Theta = \Theta_0 \;\times\; H_1: \Theta \neq \Theta_0$ ... oboustranný test
$H_0: \Theta \leq \Theta_0 \;\times\; H_1: \Theta > \Theta_0$ ... pravostranný test
$H_0: \Theta \geq \Theta_0 \;\times\; H_1: \Theta < \Theta_0$ ... levostranný test
kde $\Theta$ je parametr a $\Theta_0$ je pevně zadaná hodnota.

### *Testy střední hodnoty normálního rozdělení*

V případě, že hypotézy se týkají střední hodnoty normálního rozdělení, mluvíme o tzv. $t$-testech a testovou statistiku obvykle označujeme $T$.

a) Jednovýběrový t-test
Nechť $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2$ je neznámé, $\mu_0$ je pevně zvolená hodnota.
Testová statistika má tvar $T = {(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}/{S}$ a jak již víme, pokud platí $H_0$ má rozdělení $t(n-1)$.

| Nulová hypotéza | Alternativní hypotéza | $H_0$ zamítneme na α, jestliže |
|---|---|---|
| $H_0: \mu = \mu_0$ | $H_1: \mu \neq \mu_0$ | $\lvert T\rvert \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)$ |
| $H_0: \mu \leq \mu_0$ | $H_1: \mu > \mu_0$ | $T \geq t_{1-\alpha}(n-1)$ |
| $H_0: \mu \geq \mu_0$ | $H_1: \mu < \mu_0$ | $T \leq t_{\alpha}(n-1) = -t_{1-\alpha}(n-1)$ |

b) Párový t-test
Nechť $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ je dvourozměrný náhodný výběr pocházející z normálního rozdělení, kde $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ a $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.
Označme $Z_i = X_i - Y_i$, $\bar{Z} = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ a $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2$, potom testová statistika má tvar
$T = {\bar{Z}\sqrt{n}}/{S}$ a analogický předchozímu, pokud platí $H_0$ má rozdělení $t(n-1)$.

| Nulová hypotéza | Alternativní hypotéza | $H_0$ zamítneme na α, jestliže |
|---|---|---|
| $H_0: \mu_X = \mu_Y$ | $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ | $\lvert T\rvert \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)$ |
| $H_0: \mu_X \leq \mu_Y$ | $H_1: \mu_X > \mu_Y$ | $T \geq t_{1-\alpha}(n-1)$ |
| $H_0: \mu_X \geq \mu_Y$ | $H_1: \mu_X < \mu_Y$ | $T \leq t_{\alpha}(n-1) = -t_{1-\alpha}(n-1)$ |

Poznámky

- Párový test spočívá v „převodu“ na jednovýběrový t-test $\left(Z_1, \dots, Z_n \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2)\right)$.

c) Dvouvýběrový t-test

Nechť $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ a $Y_1, \dots, Y_m \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$, jsou dva <u>nezávislé</u> náhodné výběry (obecně nestejných rozsahů) se stejným neznámým rozptylem $\sigma^2$.

Testová statistika má tvar $T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$ a pokud platí $H_0$, má rozdělení $t(n+m-2)$.

| Nulová hypotéza | Alternativní hypotéza | $H_0$ zamítneme na α, jestliže |
|---|---|---|
| $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ | $H_1\colon \mu_X \neq \mu_Y$ | $\lvert T \rvert \geq t_{1-\alpha/2}(n+m-2)$ |
| $H_0\colon \mu_X \leq \mu_Y$ | $H_1\colon \mu_X > \mu_Y$ | $T \geq t_{1-\alpha}(n+m-2)$ |
| $H_0\colon \mu_X \geq \mu_Y$ | $H_1\colon \mu_X < \mu_Y$ | $T \leq t_\alpha(n+m-2) = -t_{1-\alpha}(n+m-2)$ |

Poznámky

- Vždy je třeba „zkoumat“ splnění předpokládů dvouvýběrového t-testu. Předpoklad nezávislosti obou náhodných výběrů je zásadní. Mírné porušení normality nemívá závažně dopady (důsledek centrálních limitních vět) a menší odchylky rozptylů (viz následující část týkající se testů rozptylu) také nemají zásadní vliv na závěry.
- Pozor na rozdíl mezi párovým a dvouvýběrovým t-testem.
  Dvouvýběrový t-test použijeme v případě, kdy máme k dispozici dva <u>nezávislé</u> náhodné výběry. Jeho použití v situaci, kdy je třeba použít párový t-test je hrubou chybou. Není hrubou chybou použít párový t-test v situaci, kdy je možné použít dvouvýběrový t-test (je to méně efektivní).
- V situaci, kdy není splněn předpoklad shody rozptylů, lze použít následující test:

| Nulová hypotéza | Alternativní hypotéza | $H_0$ zamítneme na α, jestliže |
|---|---|---|
| $H_0\colon \mu_X = \mu_Y$ | $H_1\colon \mu_X \neq \mu_Y$ | $\frac{\lvert\bar{X}-\bar{Y}\rvert}{\sqrt{S_X^2/n+S_Y^2/m}} \geq \frac{t_{1-\alpha/2}(n-1)\cdot S_X^2/n+t_{1-\alpha/2}(m-1)\cdot S_Y^2/m}{S_X^2/n+S_Y^2/m}$ |
| $H_0\colon \mu_X \leq \mu_Y$ | $H_1\colon \mu_X > \mu_Y$ | $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S_X^2/n+S_Y^2/m}} \geq \frac{t_{1-\alpha}(n-1)\cdot S_X^2/n+t_{1-\alpha}(m-1)\cdot S_Y^2/m}{S_X^2/n+S_Y^2/m}$ |
| $H_0\colon \mu_X \geq \mu_Y$ | $H_1\colon \mu_X < \mu_Y$ | $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S_X^2/n+S_Y^2/m}} \leq \frac{t_\alpha(n-1)\cdot S_X^2/n+t_\alpha(m-1)\cdot S_Y^2/m}{S_X^2/n+S_Y^2/m}$ |

## *Testy rozptylu normálního rozdělení*

a) Jednovýběrový test rozptylu

Nechť $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu, \sigma^2$ jsou neznámé, $\sigma_0^2$ je pevně zvolená hodnota.

Testová statistika má tvar $Z = {(n-1)S^2}/{\sigma_0^2} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n\sigma_0^2}$, která má za platnosti $H_0$ rozdělení $\chi^2(n-1)$.

| Nulová hypotéza | Alternativní hypotéza | $H_0$ zamítneme na α, jestliže |
|---|---|---|
| $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ | $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ | $Z \leq \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ nebo $Z \geq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ |
| $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ | $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ | $Z \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ |
| $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ | $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ | $Z \leq \chi^2_{\alpha}(n-1)$ |

b) Dvouvýběrový test rozptylu

Nechť $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ a $Y_1, \dots, Y_m \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, jsou dva nezávislé náhodné výběry (obecně nestejných rozsahů).

Teoretickým základem je tvrzení $\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F(n-1, m-1)$ a testová statistika má tvar ${S_X^2}/{S_Y^2}$, která má za platnosti $H_0$ rozdělení $F(n-1, m-1)$.

| Nulová | Alternativa | $H_0$ zamítneme na α, jestliže |
|---|---|---|
| $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ | $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ | ${S_X^2}/{S_Y^2} \leq F_{\alpha/2}(n-1, m-1)$ nebo ${S_X^2}/{S_Y^2} \geq F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)$ |
| $H_0: \sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$ | $H_1: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ | ${S_X^2}/{S_Y^2} \geq F_{1-\alpha}(n-1, m-1)$ |
| $H_0: \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$ | $H_1: \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ | ${S_X^2}/{S_Y^2} \leq F_{\alpha}(n-1, m-1)$ |