Pravděpodobnost a statistika, přednáška 13. 4. 2020

Státní svátek - Velikonoce

Pravděpodobnost a statistika, přednáška 20. 4. 2020

Doporučená literatura: Likeš J., Machek J.: Matematická statistika. SNTL, Praha 1982.
Anděl J.: Statistické metody. MatfyzPress 2019

Úvod do problematiky odhadů

Myšlenka - na základě hodnot „naměřených“ veličin (tj. náhodného výběru) chceme zjistit/odhadnout neznámé hodnoty parametrů (resp. jejich funkcí). Například z naměřených dob do poruchy jistého zařízení chceme odhadnout jeho střední dobu do poruchy, pravděpodobnost přežití zadané doby t_0, resp. dobu $t_{1-\alpha}$, kterou zařízení přežije se zvolenou pravděpodobností α.

Exaktnější formulace - $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr pocházející z rozdělení s neznámými parametry $\Theta_1, \dots, \Theta_r$. Hledáme statistiku $T = T(X_1, \dots, X_n)$, která bude co „nejlepším“ odhadem funkce $\tau = \tau(\Theta_1, \dots, \Theta_r)$.

Existují dva základní typy odhadů - bodové odhady a intervalové odhady (intervaly spolehlivosti, konfidenční intervaly)

Bodové odhady

Jako bodový odhad funkce $\tau = \tau(\Theta_1, \dots, \Theta_r)$ použijeme jednu vhodně zvolenou statistiku $T = T(X_1, \dots, X_n)$.

Poznámky

- V případě bodových odhadů je výsledkem vypočtů jedno číslo, hodnota statistiky $T(X_1, \dots, X_n)$, které prohlásíme za odhad τ.
- Jako bodový odhad lze použít různě statistiky. Např. střední hodnotu lze odhadnout výběrovým průměrem $\bar{X}$, ale také středem rozpětí $\left(X_{(1)} + X_{(n)}\right)/2$, resp. výběrovým mediánem. Ne všechny odhady jsou však stejně „dobré“, což vede k formulaci následujících možných vlastností, které můžeme od odhadu požadovat.
  Nestranný (nevychýlený) odhad = střední hodnota odhadu je rovna odhadované funkci parametrů.
  Nejlepší nestranný odhad (dále jen NNO) = nestranný odhad, který má ze všech nestranných odhadů dané funkce parametrů nejmenší rozptyl.
  V celé řadě případů je rozumné používat právě NNO, pokud ovšem existuje.
- Postačující statistiky pro parametr $\mathbf{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_r)$ daného rozdělení je množina statistik, které „vyčerpávají“ všechny informace o parametru $\mathbf{\Theta}$ obsažené v náhodném výběru a jsou využitelné pro odhad $\mathbf{\Theta}$. Např. postačující statistikou pro alternativní, Poissonovo i exponenciální rozdělení je součet $\sum_{i=1}^{n} X_i$, pro odhad parametrů normálního rozdělení to je $\sum_{i=1}^{n} X_i$ a $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ (samozřejmě včetně znalosti rozsahu náhodného výběru). V praxi to znamená, že není třeba mít k dispozici přímo „naměřené“ hodnoty

$X_1, \dots, X_n$, ale vystačíme se znalostí počtu naměřených hodnot, jejich součtem, resp. součtem druhých mocnin.

Následující tabulka obsahuje přehled bodových odhadů:

Rozdělení	Odhadovaná funkce	NNO	Jiný odhad
$A(p)$	p	$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$	- - - - -
$Po(\lambda)$	$\lambda^k, k = 1,2, \dots$	$\frac{1}{n^k}(\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1) \dots (\sum_{i=1}^{n} X_i - k + 1)$	$\bar{X}^k$
	$e^{-\lambda}$	$(1 - 1/n)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$	$e^{-\bar{X}}$
$Exp(\lambda)$	$1/\lambda$	$\bar{X}$	- - - - -
	λ	$(n-1) / \sum_{i=1}^{n} X_i$	$1/\bar{X}$
	$R(t) = e^{-\lambda t}$	$\left(1 - t / \sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{n-1}$, pro $\sum_{i=1}^{n} X_i \geq t$	$e^{-t/\bar{X}}$
	$t_\alpha = -T \ln(1-\alpha)$	- - - - -	$-\bar{X} \ln(1-\alpha)$
$N(\mu, \sigma^2)$	μ	$\bar{X}$	- - - - -
	σ^2	S^2	D^2
	σ	- - - - -	S, D
	x_α	- - - - -	$\bar{X} + u_\alpha S$

kde $\bar{X}$ ... výběrový průměr, S^2 ... výběrový rozptyl, u_α ... α-kvantil $N(\mu, \sigma^2)$.

Metody konstrukce bodových odhadů

V situaci, kdy odhadujeme funkci parametrů, pro kterou nemáme k dispozici odhad, lze použít některý z následujících postupů.

- Metoda maximální věrohodnosti

  Zjednodušeně řečeno - maximálně věrohodný odhad je taková hodnota parametru, která je pro dané „naměřené“ hodnoty $X_1, \dots, X_n$ nejpravděpodobnější.

  Je-li $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr ze spojitého rozdělení s hustotou $f(x; \mathbf{\Theta})$, kde $\mathbf{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_r)$ je vektor neznámých parametrů, potom nejpravděpodobnější je taková hodnota parametru $\mathbf{\Theta}^*$, která maximalizuje $L(\mathbf{\Theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i; \mathbf{\Theta})$, resp. maximalizuje $l(\mathbf{\Theta}) = \ln L(\mathbf{\Theta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln\big(f(X_i; \mathbf{\Theta})\big)$.
  V dané situaci využijeme k nalezení maxima funkce $l(\mathbf{\Theta})$ derivace dle proměnné $\mathbf{\Theta}$ (funkce $l(\mathbf{\Theta})$ má výhodnější tvar než $L(\mathbf{\Theta})$). Dostáváme tak soustavu r věrohodnostních rovnic

$$\sum_{i=1}^{n} {\partial \ln f(X_i;\mathbf{\Theta})}\Big/{\partial \Theta_j} = 0, j = 1, \dots, r.$$

Jako řešení pak dostáváme právě maximálně věrohodný odhad $\mathbf{\Theta}^* = (\Theta_1^*, \dots, \Theta_r^*)$.

Příklad - maximálně věrohodný odhad parametru exponenciálního rozdělení

Jelikož $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$, má hustota tvar $f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$.

Exponenciální rozdělení je jednoparametrické, tedy místo výše zmíněné soustavy dostáváme pouze jednu rovnici $\sum_{i=1}^{n}\left({1}/{\lambda} - X_i\right) = 0$, odkud jako maximálně věrohodný odhad parametru λ dostáváme

$$\lambda = {n}\Big/{\sum_{i=1}^{n} X_i}, \text{ tj. } \lambda = {1}/{\bar{X}}.$$

- Metoda momentů

  Myšlenka - v celé adě případů lze parametr Θ vyjádřit jako funkci konečného počtu momentů, tj. $\Theta = h(\mu_1, \dots, \mu_k)$. Momentová metoda pak jako odhad používá statistiku

$$T(X_1, \dots, X_n) = h\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \dots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right).$$

  Příklad - odhad parametrů binomického rozdělení metodou momentů

  $X_1, \dots, X_m \sim Bi(n,p)$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení s neznámými parametry n, p

  Aplikaci metody momentů dostáváme rovnice

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i = E(X) = np, \ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2 = E(X^2) = np(1-p) - (np)^2.$$

  Jako odhad n pak dostáváme statistiku

$$T_1(X_1, \dots, X_m) = {\bar{X}^2}\Big/{\left(\bar{X} + \bar{X}^2 - {\sum_{i=1}^{m} X_i^2}/{m}\right)}$$

  a jako odhad p dostáváme statistiku

$$T_2(X_1, \dots, X_m) = {\bar{X}}\Big/{T_1(X_1, \dots, X_m)}.$$

Intervalové odhady

Myšlenka - k odhadu funkce parametru použijeme dvojici statistik T_d, T_h zvolených tak, že interval (T_d, T_h) pokrývá s vysokou pravděpodobností (obvykle 0,95, resp. 0,99) skutečnou hodnotu odhadované funkce parametrů. Statistiky jsou navíc obvykle voleny tak, aby interval (T_d, T_h) byl co nejkratší. Statistiku T_d nazáváme dolní mez intervalu spolehlivosti a T_h horní mez intervalu spolehlivosti.

Exaktnější formulace - $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr pocházející z rozdělení s neznámými parametry $\Theta_1, \dots, \Theta_r$, $\tau = \tau(\Theta_1, \dots, \Theta_r)$ je funkce parametrů. Hledáme dvojici statistik $T_d = T_d(X_1, \dots, X_n)$ a $T_h = T_h(X_1, \dots, X_n)$, takovou, že pro $\alpha \in (0,1)$ platí

$$P(T_d < \tau < T_h) = 1 - \alpha$$

a navíc interval (T_d, T_h) je nejkratší ze všech intervalů dané vlastnosti.

Poznámky

- Výše specifikovaný interval (T_d, T_h) nazývame oboustranný $(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti (zkratka IS) pro funkci parametrů $\tau = \tau(\Theta_1, \dots, \Theta_r)$.

- Kromě oboustranných IS se používají i tzv. jednostranné IS, konkrétně $(T_d, +\infty)$ je levostranný IS, resp. $(-\infty, T_h)$ je pravostranný IS.

Intervaly spolehlivosti pro parametry normálního rozdělení

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$.

a) IS pro μ při známém σ^2

Jelikož ${(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}/_{\sigma} \sim N(0,1)$ dostáváme

$$P\left(-u_{1-\alpha/2} < {(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}/_{\sigma} < u_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

a tedy po snadné úpravě

$$P\left(\underbrace{\bar{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{T_d} < \mu < \underbrace{\bar{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{T_h}\right) = 1 - \alpha.$$

Jako oboustranný $(1 - \alpha)\%$ IS pro μ při známém σ^2 tak dostáváme

$$\left(\bar{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

V případě jednostranných IS postupujeme analogicky, tj.

Zřejmě $P\left({(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}/_{\sigma} < u_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$, tedy $P\left(\bar{X} - u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu\right) = 1 - \alpha$ a tedy jako levostranný $(1 - \alpha)\%$ IS pro μ při známém σ^2 dostáváme

$$\left(\bar{X} - u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right).$$

Analogicky pro pravostranný $(1 - \alpha)\%$ IS pro μ při známém σ^2 dostáváme

$$\left(-\infty, \bar{X} + u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

b) IS pro μ při neznámém σ^2

Jelikož ${(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}/_{S} \sim t(n-1)$ dostáváme, stejným postupem jako v části a), následující $(1 - \alpha)\%$ IS pro μ při neznámém σ^2

$$\left(\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \text{ ... oboustranný}$$

$$\left(\bar{X} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, +\infty\right) \text{ ... levostranný}$$

$$\left(-\infty, \bar{X} + t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \text{ ... pravostranný}$$

c) IS pro σ^2

Jelikož ${(n-1)S^2}/_{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ dostáváme

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2}(n-1) < {(n-1)S^2}/_{\sigma^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

a tedy po snadné úpravě dostáváme následující oboustranný $(1 - \alpha)\%$ IS pro σ^2

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$$

a pro jednostranné $(1 - \alpha)\%$ IS pro σ^2 dostáváme

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}, +\infty\right), \text{ resp. } \left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}\right).$$

Následující tabulka obsahuje přehled intervalových odhadů parametrů vybraných rozdělení:

Rozdělení	Odhad. fce	NNO
$A(p)$	p	$\left(\frac{v}{(n-v+1)F_{1-\alpha/2}(2n-2v+2,2v)+v}, \frac{(v+1)F_{1-\alpha/2}(2v+2,2n-2v)}{n-v+(v+1)F_{1-\alpha/2}(2v+2,2n-2v)}\right)$
		$\left(\bar{X}-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n}, \bar{X}+u_{1-\alpha/2}\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n}\right)$
$Po(\lambda)$	λ	$\left(\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2v)}{2n}, \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2v+2)}{2n}\right)$
		$\frac{v-u_{1-\alpha/2}\sqrt{v}}{n}, \frac{v+1+u_{1-\alpha/2}\sqrt{v+1}}{n}$
$Exp(\lambda)$	$T = 1/\lambda$	$\left(\frac{2v}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}, \frac{2v}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}\right)$
	$R(t) = e^{-\lambda t}$	$\left(\exp\left(-\frac{t\cdot\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2v}\right), \exp\left(-\frac{t\cdot\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2v}\right)\right)$
$N(\mu,\sigma^2)$	μ	$\left(\bar{X}-u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}+u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
		$\left(\bar{X}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$
	σ^2	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$

, kde $v = \sum_{i=1}^{n} X_i$