Fakulta přírodovědně humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci

Úvod do diskrétní matematiky

Doc. RNDr. Miroslav Koucký, CSc.

Liberec, 2020

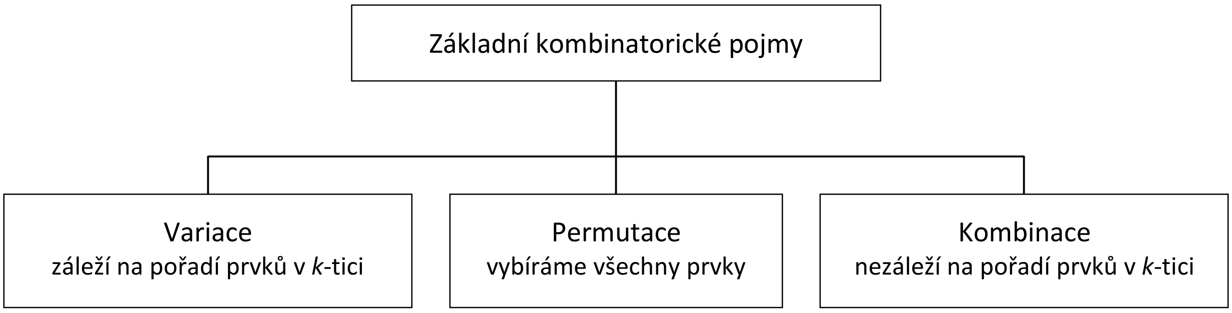
Obsah

Předmluva

Skripta Úvod do diskrétní matematiky jsou úvodem do elementárního kombinatorického počítání a seznamují čtenáře se základními myšlenkami a pojmy z oblasti klasické kombinatoriky. Na tato skripta budou navazují skripta Kombinatorické metody II, která se věnují dalším vybraným tématům zejména teorii grafů.

1. Elementární kombinatorika

Systematický rozvoj kombinatoriky lze datovat do 17. století a je spojen se jmény Blaise Pascal, Pierre de Fermat, Christian Huygens a Jacob Bernoulli. Hlavní pozornost se soustředila především na řešení různých otázek spojených s problematikou hazardních her, loterií apod. V tomto kontextu lze nejjednodušší úlohu kombinatoriky formulovat následovně - kolika různými způsoby je možné z n objektů vybrat k-tici (tj. k objektů). V závislosti na podmínkách, které definují různé způsoby výběru, se dostáváme k následujícím základním kombinatorickým pojmům - variace, permutace a kombinace. První představu o obsahu těchto pojmů si lze udělat z následujícího schématu.



1.1. Základní pravidla kombinatoriky

Při řešení kombinatorických úloh velmi rychle zjistíme, že většina z nich má tu nepříjemnou vlastnost, že nemůže být řešena metodou „hrubé síly", kdy hledáme řešení výčtem, resp. vyzkoušením všech možností. Ukazuje se, že tento přístup k řešení kombinatorických úloh je i mimo možnosti současné výpočetní techniky. Z těchto důvodů jsou potřebná základní kombinatorická pravidla a metody, jejichž vhodnou aplikací lze vyřešit většinu běžných, někdy i netriviálních, kombinatorických úloh. Jde především o pravidlo součtu, pravidlo součinu, Dirichletův princip a princip inkluze a exkluze.

Pravidlo součtu

Nechť množina $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ obsahuje *m* různých prvků a množina $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ obsahuje *n* různých prvků, navíc $A \cap B = \emptyset$. Potom jeden prvek z množiny $A \cup B$ lze vybrat $m + n$ různými způsoby.

Důkaz.

Vzhledem k předpokladu $A \cap B = \emptyset$, je pravidlo součtu ekvivalentní s tvrzením $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Pravidlo součinu

Nechť množina $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ obsahuje *m* různých prvků a množina $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ obsahuje *n* různých prvků. Potom uspořádanou dvojici prvků (a_i, b_j), kde $a_i \in A, b_j \in B$ lze vybrat $m \cdot n$ různými způsoby.

Důkaz.

Pravidlo součinu je ekvivalentní se zřejmým tvrzením $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, kde symbol $\times$ označuje kartézský součin. Schematicky lze toto pravidlo znázornit maticí

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \cdots & (a_1, b_n) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \cdots & (a_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (a_m, b_1) & (a_m, b_2) & \cdots & (a_m, b_n) \end{Bmatrix}$$

typu m, n, která obsahuje (právě jednou) všechny uspořádané dvojice $(a_i, b_j), i = 1, \dots m, j = 1, \dots n$.

Poznámky

- Pravidlo součtu lze snadno zobecnit na případ více množin. Jsou-li $A_1, \dots, A_n$ po dvou disjunktní množiny (tj. $\forall i \neq j \; A_i \cap A_j = \emptyset$), dostáváme
$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$
V případě, kdy není splněna podmínka disjunktnosti po dvou, pravidlo součtu nelze aplikovat a je třeba použít princip inkluze a exkluze (viz poznámka dále).
- Pravidlo součinu lze také zobecnit na případ více (konečných) množin. Dostáváme tak
$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

Princip inkluze a exkluze (princip IE)

Označme N celkový počet objektů, které mohou mít některé z vlastností $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Označme dále $N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$ počet všech objektů z celkového počtu N, které mají vlastnosti uvedené v závorce, tj. $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ (a to bez ohledu na to, zda mají některé další vlastnosti). Potom pro počet $N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ objektů, které nemají žádnou z uvedených vlastností $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ platí

$$N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = N - \left[\sum_{i=1}^{n} N(\alpha_i)\right] + \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})\right] - \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3})\right] +$$
$$\dots + (-1)^k \left[\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})\right] + \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Důkaz.

Matematickou indukcí dle počtu vlastností, tj. dle n.

Pro $n = 1$ má princip IE triviálně platný tvar $N(\bar{\alpha}_1) = N - N(\alpha_1)$.

Předpokládejme nyní jeho platnost pro libovolnou skupinu předmětů a $(n-1)$ vlastností, tj.

$$N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}) = N - \left[\sum_{i=1}^{n-1} N(\alpha_i)\right] + \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n-1} N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})\right] + \cdots$$
$$\dots + (-1)^k \left[\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n-1} N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})\right] + \dots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$$

Aplikací tohoto předpokladu na skupinu předmětů majících vlastnost a_n dostáváme

$$N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}, \alpha_n) = N(\alpha_n) - \left[\sum_{i=1}^{n-1} N(\alpha_i, \alpha_n)\right] + \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n-1} N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_n)\right] + \cdots$$
$$\dots + (-1)^k \left[\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n-1} N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}, \alpha_n)\right] + \dots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$$

Dále zřejmě platí

$$N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}) - N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}, \alpha_n).$$

Po dosazení výše uvedených vztahů a elementární úpravě dostáváme dokazované tvrzení.

Poznámky

- Množinově bývá princip IE zapisován ve tvaru
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|\right] + \dots + (-1)^{k+1} \left[\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|\right] + \cdots$$
$$(-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

- Speciálně v případě $n = 2$ dostáváme

$$N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_2), \text{ resp. } |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

V případě $n = 3$ dostáváme

$$N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_3) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

resp. $|A_1 \cup A_2 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

(případy $n = 2{,}3$ lze přehledně znázornit Vennovými diagramy).

Dirichletův princip (P. G. L. Dirichlet, 1805 – 1859)
Při libovolném rozmístění n objektů do k přihrádek obsahuje alespoň jedna z nich nejméně $\lceil n/k \rceil$ objektů.
Důkaz.
Sporem. Předpokládejme, že každá přihrádka obsahuje nejvýše $\lceil n/k \rceil - 1$ objektů. Z definice $\lceil x \rceil$ dostáváme $n \leq k(\lceil n/k \rceil - 1) < k(n/k) = n$. Spor - alespoň jedna přihrádka obsahuje alespoň $\lceil n/k \rceil$ objektů.

Příklad
Určete minimální počet obyvatel města, jestliže víte, že alespoň 15 lidí má ve stejný den a měsíc narozeniny (k roku nepřihlížíme a předpokládáme 365 dní v roce).
Řešení.
Dny reprezentují „přihrádky“, tj. $k = 365$. V alespoň jedné má být 15 objektů (osob se stejným datem narození). Z Dirichletova principu plyne, že hledáme nejmenší $n \in N$ takové, aby $\left\lceil {}^{n}/_{365} \right\rceil \geq 15$. Odtud $n = 5\,111$.

Poznámka
Dirichletův princip lze formulovat také následovně: Uvažujme k libovolných kladných přirozených čísel $n_1, \dots, n_k$. Pokud rozmístíme $n_1 + \dots + n_k - k + 1$ objektů do k skupin, potom existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ a alespoň jedna skupina, která obsahuje alespoň n_i objektů. (důkaz snadné cvičení)

1.2. Variace, permutace, kombinace

Nyní se vrátíme k exaktnějšímu vymezení základních kombinatorických pojmů - variace, permutace a kombinace. Připomeňme, že pro $n \in N$ označujeme součin $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ symbolem $n!$ (čteme n faktoriál), kde definujeme $0! = 1$.

Definice - variace bez opakování
Označme M množinu obsahující n různých prvků. Variací k-té třídy z n prvků (resp. na n-prvkové množině M) nazýváme každou uspořádanou k-tici navzájem různých prvků množiny M. Počet všech variací k-té třídy z n prvků označíme A_n^k.

Stručně lze variace bez opakování charakterizovat jako uspořádané k-tice (tj. záleží na pořadí prvků ve vybrané k-tici), ve které se jednotlivé prvky nesmí opakovat. Dvě variace (bez opakování) považujeme tedy za různé, pokud se liší na alespoň jedné pozici.

Tvrzení
Pro libovolné $k, n \in N, k \leq n$ platí

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Důkaz.

Počty prvků, které jsou na „výběr“ při obsazování jednotlivých pozic ve variaci (bez opakování), jsou zřejmě dány následující tabulkou:

1. pozice	2. pozice	…	k-tá pozice
n	$n-1$	…	$n-k+1$

Dle pravidla součinu tak dostáváme platnost tvrzení.

Definice - variace s opakováním

Mějme k dispozici n různých druhů prvků, každý druh v libovolném množství. Variací k-té třídy z n prvků s opakováním nazýváme každou uspořádanou k-tici vytvořenou z prvků uvedených druhů. Počet všech variací k-té třídy z n prvků s opakováním označíme $\bar{A}_n^k$.

Stručně lze variace s opakováním charakterizovat jako uspořádané k-tice, ve které se jednotlivé druhy prvků mohou opakovat. Dvě variace s opakováním považujeme za různé, pokud se liší na alespoň jedné pozici.

Tvrzení

Pro libovolné $k, n \in N$ platí

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

Důkaz.

Počty prvků, kterými lze obsadit jednotlivé pozice ve variaci s opakováním, jsou zřejmě dány následující tabulkou (druhy se mohou opakovat!)

1. pozice	2. pozice	…	k-tá pozice
n	n		n

Dle pravidla součinu tak dostáváme platnost tvrzení.

Poznámky

Variace k-té třídy z n prvků lze definovat pomocí pojmu zobrazení. Označme $K = \{1,2, \dots, k\}$ a $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ množinu obsahující n různých prvků.

- Variace k-té třídy z n prvků bez opakování ($k \leq n$) odpovídají všem prostým zobrazením K do A.
- Variace k-té třídy z n prvků s opakováním odpovídají všem zobrazením K do A.

Příklad

Určete počet všech podmnožin libovolné n prvkové množiny A.

Řešení.

Označme $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Každé podmnožině $B \subseteq A$ lze přiřadit uspořádanou n-tici $(x_1, \dots, x_n)$, nazývanou charakteristický vektor podmnožiny B tak, že

$$x_i = \begin{cases} 1, & a_i \in B \\ 0, & a_i \notin B \end{cases}.$$

Podmnožiny tak jednoznačně odpovídají výše uvedeným variacím n-té třídy s opakováním ze dvou prvků 0, 1. Naopak, každá variace n-té třídy z 2 prvků (s opakováním) jednoznačně definuje jistou podmnožinu množiny A, proto počet všech podmnožin n-prvkové množiny je roven počtu variací n-té třídy z 2 prvků s opakováním, tj. $\bar{A}_2^n = 2^n$.

Poznámka

Systém všech podmnožin množiny A se běžně označuje některým z následujících symbolů $P(A)$, 2^A a nazývá se potenční množina množiny A. Jak plyne z výše uvedeného příkladu, pro konečnou množinu A platí

$$|P(A)| = 2^{|A|}.$$

Uveďme např., že $P(\emptyset) = \emptyset, P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, P\big(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}$.

Definice - permutace bez opakování
Označme M množinu obsahující n různých prvků. Permutací řádu n (resp. na množině M) nazveme libovolnou uspořádanou n-ti vytvořenou z prvků množiny M. Počet všech permutací řádu n označíme $P(n)$, resp. P_n.

Poznámky

- Permutace řádu n (bez opakování) jsou speciálním případem variací bez opakování, totiž variace n-té třídy z n prvků, tj. $P(n) = A_n^n$.
- Permutace na množině M odpovídají všem vzájemně jednoznačným zobrazením množiny M na sebe (tzv. bijektivní zobrazení, tj. prosté a na).
- Platí následující rekurentní vztahy
  - $P(n) = n \cdot P(n-1)$, kde $P(0) = 1$,
  - $P(n) = (n-1) \cdot \big(P(n-1) + P(n-2)\big)$, kde $P(0) = P(1) = 1$.

  S prvním z výše uvedených vztahů se ještě setkáme v celé řadě souvislostí. V této chvíli uveďme jeho možnou kombinatorickou interpretaci. Množinu všech permutací na $\{a_1, \dots, a_n\}$ rozložíme do n tříd $A_1, \dots, A_n$ tak, že A_i obsahuje právě všechny permutace, které mají na první pozici prvek a_i. Snadno zjistíme, že takto definované třídy tvoří rozklad (třídy jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocení obsahuje všechny uvažované permutace) a navíc ze zřejmých důvodů mají stejný počet prvků, tj. $\forall i, j\ |A_i| = |A_j|$. Z definice jednotlivých tříd pak vyplývá, že $|A_i| = P(n-1)$, tedy $P(n) = \sum_{i=1}^{n} |A_i| = nP(n-1)$.

Tvrzení
Pro libovolné $n \in N$ platí
$$P(n) = n!$$
kde definujeme $0! = 1$.
Důkaz.
Počet možností jak obsadit jednotlivé pozice v permutaci jsou zřejmě dány tabulkou:

1. pozice	2. pozice	…	n-tá pozice
n	$n-1$		1

Podle pravidla součinu dostáváme platnost tvrzení.

Definice - permutace s opakováním
Nechť množina M obsahuje n_1 stejných prvků 1. druhu, n_2 stejných prvků 2. druhu až n_k stejných prvků k-tého druhu. Potom každé uspořádání prvků této množiny (tj. každou uspořádanou n-tici těchto prvků, kde $n = n_1 + \dots + n_k$) nazveme permutací s opakováním řádu $(n_1, \dots, n_k)$. Počet všech permutací s opakováním řádu $(n_1, \dots, n_k)$ označíme $P(n_1, \dots, n_k)$, resp. $P_{n_1,\dots,n_k}$.

Tvrzení
Pro libovolná přirozená čísla $n_1, \dots, n_k$ platí
$$P(n_1, \dots, n_k) = \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$
Důkaz.
Označme $M = \{\underbrace{a, \dots, a}_{n_1}, \underbrace{b, \dots, b}_{n_2}, \dots, \underbrace{r, \dots, r}_{n_k}\}$, kde $n = n_1 + \dots + n_k$ množinu prvků, ze kterých budou vytvářeny permutace. Každá permutace s opakováním je zřejmě invariantní vzhledem k permutacím prvků jednotlivých druhů. Prvky i-tého druhu lze permutovat $n_i!$ způsoby, tedy dle pravidla součinu dostáváme

$$P(n_1+\cdots+n_k)=P(n_1,\dots,n_k)\cdot n_1!\,\cdot\ldots\cdot\,n_k!,$$
odkud je platnost tvrzení zřejmá.

Příklad
Kolik různých slov (bez ohledu na smysl) lze sestavit při využití všech písmen slova POPOKATEPETL.
Řešení.
Evidentně jde o permutace s opakováním na množině $M=\{A,E,E,K,L,O,O,P,P,P,T,T\}$, tedy hledaný počet slov je roven $P(1,2,1,1,2,3,2)=\frac{12!}{1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 2!}=9\,979\,200$.

Definice - kombinace bez opakování
Označme M množinu obsahující n různých prvků. Kombinací k-té třídy z n prvků (resp. na n-prvkové množině M) nazýváme každou neuspořádanou k-tici navzájem různých prvků množiny M. Počet kombinací k-té třídy z n prvků (bez opakování) budeme značit C_n^k.

Poznámky
· Dvě kombinace považujeme za různé, pokud se liší v zastoupení některého prvku (bez ohledu na pozici).
· Číslo C_n^k se v závislosti na kontextu nazývá kombinační číslo, resp. binomický koeficient a označuje se také symbolem $\binom{n}{k}$, který čteme „n nad k“.

Tvrzení
Pro libovolná přirozená $k,n\in N, k\le n$ platí
$$C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
Důkaz.
Z každé kombinace (neuspořádané k-tice) dostaneme $k!$ různých variací (uspořádané k-tice) lišící se pouze pořadím prvků, tedy $A_n^k=k!\cdot C_n^k$, odtud je platnost tvrzení zřejmá.

Tvrzení - základní vlastnosti kombinačních čísel
Pro $k,n\in N, k\le n$ platí:
a) $C_n^k=C_n^{n-k}$, (symetrie)
b) $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$, (Pascalova identita)
c) $C_n^k=P(k,n-k)$,
d) $\sum_{k=0}^n C_n^k=2^n$.

Důkaz – kombinatorický.
Označme $M=\{a_1,\dots,a_n\}$.
ad a) Každá kombinace k-té třídy z n prvků jednoznačně definuje doplňkovou kombinaci $(n-k)$-té třídy (zbylé prvky) a tedy jejich počty musí být stejné, tj. $C_n^k=C_n^{n-k}$.
ad b) Množinu kombinací k-té třídy na M rozložíme na disjunktní množiny A_1,A_2, kde A_1 tvoří všechny kombinace obsahující a_1, A_2 všechny ostatní. Zřejmě $C_n^k=|A_1|+|A_2|$. Pro počet kombinací v A_1 platí $|A_1|=C_{n-1}^{k-1}$ (kombinace obsahují a_1, ostatních $(k-1)$ prvků vybíráme libovolně z $(n-1)$ zbývajících). Počet kombinací v A_2 je $|A_2|=C_{n-1}^k$ (vybíráme k prvků z $(n-1)$, neboť nesmíme použít a_1).
ad c) Každé kombinaci k-té třídy z n prvků přiřadíme charakteristický vektor, tj. uspořádanou n-tici $(x_1,\dots,x_n)$, kde $x_i=1$, pokud a_i je v dané kombinaci, resp. $x_i=0$, pokud a_i není v dané kombinaci. Vztah mezi kombinacemi a jejich charakteristickými vektory, je vzájemně jednoznačný, proto jsou jejich počty stejné. Charakteristické vektory jsou permutace s opakováním z k prvků prvního druhu (1) a $(n-k)$ prvků druhého druhu (0) a tudíž $C_n^k=P(k,n-k)$.

ad d) Pravá strana rovnosti udává počet variací n-té třídy ze dvou prvků, např. 0,1. Množinu všech těchto variací rozložíme do $(n+1)$ tříd $A_0, \dots, A_n$, kde A_i definujeme jako množinu všech variací obsahující právě i jedniček a $(n-i)$ nul. Zřejmě platí $|A_i| = P(i, n-i) = C_n^i$ a vzhledem k tomu, že množiny A_i jsou disjunktní po dvou, dostáváme $2^n = |A_0| + \dots + |A_n|$, což bylo třeba dokázati.

Uspořádejme nyní kombinační čísla do tzv. Pascalova trojúhelníku (schéma z následujícího obr.), jehož n-tý řádek obsahuje právě všechna kombinační čísla $C_n^k, 0 \le k \le n$.

$0 \le k$

C_0^k	…	1							
C_1^k	…	1	1						
C_2^k	…	1	2	1					
C_3^k	…	1	3	3	1				
C_4^k	…	1	4	6	4	1			
C_5^k	…	1	5	10	10	5	1		
C_6^k	…	1	6	15	20	15	6	1	
C_7^k	…	1	7	21	35	35	21	7	1

$0 \le n$

Vztah a) předchozího tvrzení lze interpretovat jako symetrii řádků (tj. k-té číslo zleva se rovná k-tému číslu zprava). Vztah b) každé číslo ve schématu (které není „krajní“) je součtem dvou čísel z předcházejícího řádku umístěných v daném a předcházejícím sloupci. Vztah c) součet n-tého řádku je roven 2^n.

Dále lze odhalit i kombinatoricky jinak méně evidentní zákonitosti, např. číslo z n-tého řádku a k-tého sloupce (který není „krajní“) je rovno součtu čísel na diagonále $[n-1, k] \to [n-k-1, 0]$ (první číslo v dvojici určuje řádek a druhé sloupec). Platí tedy

$$C_n^k = C_{n-k-1}^0 + C_{n-k}^1 + \dots + C_{n-1}^k.$$

Pomocí Pascalovy identity lze dodefinovat hodnoty C_n^k pro $k, n \in Z$ (tzv. rozšířený, resp. zobecněný binomický koeficient), čímž dostáváme následující schéma, které se nazývá rozšířený Pascalův trojúhelník.

C_{-7}^k	…	0	0	1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716
C_{-6}^k	…	0	0	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792
C_{-5}^k	…	0	0	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330
C_{-4}^k	…	0	0	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120
C_{-3}^k	…	0	0	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36
C_{-2}^k	…	0	0	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8
C_{-1}^k	…	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
C_0^k	…	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
C_1^k	…	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
C_2^k	…	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0
C_3^k	…	0	0	1	3	3	1	0	0	0	0
C_4^k	…	0	0	1	4	6	4	1	0	0	0
C_5^k	…	0	0	1	5	10	10	5	1	0	0
C_6^k	…	0	0	1	6	15	20	15	6	1	0
C_7^k	…	0	0	1	7	21	35	35	21	7	1

k

n

Definice – rozšířené binomické koeficienty

Pro libovolná přirozená čísla $k, n \in N$ definujeme hodnoty rozšířených binomických koeficientů (kombinačních čísel) následovně:

- $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$, pro $0 \leq k \leq n$,
- $C_n^k = 0$, pro $0 \leq n < k$,
- $C_{-n}^k = (-1)^k C_{n+k-1}^k$, pro $0 \leq k, 0 < n$,
- $C_n^{-k} = C_{-n}^{-k} = 0$, pro $0 < k, 0 \leq n$.

Jak uvidíme později, odpovídá tato definice vlastnostem binomických koeficientů (kombinačních čísel) v kontextu jejich širšího využití.

Definice - kombinace s opakování

Mějme k dispozici n různých druhů prvků, každý v libovolném množství. Kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním $(0 \leq k, n)$ nazveme libovolnou neuspořádanou k-tici sestavenou z prvků uvedených druhů. Dvě kombinace s opakováním považujeme za různé, jestliže se liší v počtu zastoupení prvků některého druhu. Počet kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním budeme značit $\bar{C}_n^k$.

Tvrzení

Pro libovolná $n, k \in N$ platí

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Důkaz.

Každou kombinaci k-té třídy z n prvků $\{a_1, \dots, a_n\}$ s opakováním lze jednoznačně reprezentovat bitovým řetězcem délky $(n + k - 1)$ obsahujícím $k \times 1$ a $(n - 1) \times 0$. Prvky 0 tvoří oddělovače jednotlivých druhů a 1 zastupují prvky vyskytující se v kombinaci. Je zřejmé, že všem kombinacím k-té třídy z n prvků s opakováním odpovídají právě všechny permutace s opakováním z $k \times 1$ a $(n - 1) \times 0$, tj. $\bar{C}_n^k = P(k, n - 1) = C_{n+k-1}^k$.

Poznámka

Po definici pojmů variace, kombinace a permutace lze přistoupit k některým ukázkám jejich využití, např. ve statistické fyzice. Základní úlohou statistické fyziky je určit, jak se vzhledem ke svým vlastnostem rozdělují fyzikální částice. Předpokládejme, že zkoumaný systém obsahuje k částic a existuje n různých fázových stavů, ve kterých se tyto částice mohou vyskytovat. V závislosti na jejich vlastnostech dostáváme následující modely.

a) Maxwell-Boltzmannův model - nachází uplatnění v klasické fyzice (např. kinetická teorie plynů) a předpokládá, že částice jsou vzájemně rozlišitelné a každá z nich se může se stejnou pravděpodobností vyskytovat v libovolném fázovém stavu. Pro počet možných rozdělení částic tak dostáváme $\bar{A}_n^k = n^k$.

b) Bose-Einsteinův model.
Tento model nachází uplatnění např. v kvantové fyzice a předpokládá, že částice (nazývané bosony) jsou vzájemně nerozlišitelné. Rozhodující je pouze počet částic v jednotlivých fázových stavech, proto počet možných rozdělení uvažovaných částic je $\bar{C}_n^k$.

c) Fermi-Diracův model.
Tento model nachází uplatnění v atomové fyzice a lze ho považovat za Bose-Einsteinův model omezený Pauliovým vylučovacím principem. Předpokládá, že každý fázový stav může obsahovat nejvýše jednu částici (nazývanou fermion). Pro počet možných rozdělení částic tak dostáváme C_n^k.

1.3. Základní kombinatorické identity

Kombinatorické úlohy lze řešit v zásadě třemi následujícími způsoby:

- Přímá metoda – spočívá ve vhodné úpravě výrazů a využití různých obecně platných vztahů. Bývá technicky velmi náročná a je rozumně využitelná pouze v jednoduchých případech.
- Kombinatorická metoda – založena na kombinatorických úvahách. Názorná, technicky velmi jednoduchá a prakticky využitelná i ve složitějších případech.
- Metody využívající vytvořující funkce, resp. rekurentní vztahy - obecné a velmi účinné metody, využitelné i ve složitých příkladech a důkazech. Těmto metodám se budeme věnovat v navazujících skriptech.

Tvrzení

Platí

a) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$,

b) $C_{n+k}^{n+1} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{n+i}^{n}$,

c) $C_{m+n}^{k} = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}\,, k \leq \min\{m,n\}$ (Vandermondeova identita).

Důkaz.

ad a) Uvedený vztah je zřejmě ekvivalentní s tvrzením, že počet všech kombinací sudého řádu z n prvků $\{a_1, \dots, a_n\}$ je roven počtu kombinací lichého řádu. Zvolme libovolně jeden prvek, např. a_1, a následně proveďme proceduru, při které ze všech kombinací obsahujících prvek a_1 tento prvek odebereme a naopak do kombinací, které ho původně neobsahovaly, tento prvek přidáme. Je zřejmé, že opět dostaneme všechny kombinace k-té třídy z n prvků, navíc všechny kombinace lichého řádu přejdou na kombinace sudého řádu a opačně (ve všech kombinacích změníme počet prvků o jeden).

ad b) Množinu všech kombinací $(k-1)$. třídy z $(n+2)$ prvků $\{a_1, \dots, a_{n+2}\}$ s opakováním rozložíme do k tříd $A_0, \dots, A_{k-1}$, kde A_i je třída obsahující všechny kombinace $(k-1)$. třídy s opakováním, ve kterých se vyskytuje prvek a_i právě i-krát. Zřejmě tak platí

$$\bar{C}_{n+2}^{k-1} = \bar{C}_{n+1}^{k-1} + \bar{C}_{n+1}^{k-2} + \cdots + \bar{C}_{n+1}^{1} + \bar{C}_{n+1}^{0}.$$

Využitím vztahu pro výpočet kombinaci s opakováním pomocí kombinací bez opakování dostáváme dokazované tvrzení.

ad c) Množinu všech kombinací k-té třídy z $(m+n)$ prvků $\{a_1, \dots, a_m\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$ rozložíme podle počtu prvků z množiny $\{a_1, \dots, a_m\}$ do $(k+1)$ tříd $A_0, \dots, A_k$, kde A_i je třída obsahující všechny kombinace, ve kterých je právě i prvků z množiny $\{a_1, \dots, a_m\}$ a $(k-i)$ prvků z množiny $\{b_1, \dots, b_n\}$. Zřejmě platí $C_{m+n}^{k} = \sum_{i=0}^{k} |A_i|$, kde $|A_i| = C_m^i C_n^{k-i}$.

Výše uvedené identity nachází využití při řešení celé řady různých úloh. Jako příklad uvedeme vztahy pro výpočet součtů mocnin přirozených čísel.

- Ve vztahu b) položme $n = 1$. Dostáváme tak $C_1^1 + C_2^1 + \cdots + C_k^1 = C_{k+1}^2$. Odtud

  $$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

  (Součet lze stanovit i jednodušší úvahou, kterou použil C. F. Gauss. Návod – sčítejte vhodné dvojice čísel.)
- Pro výpočet součtu druhých mocnin využijeme opět vztah b), kde položíme $n = 2$. Dostáváme tak $C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{k+1}^2 = C_{k+2}^3$ a po rozepsání

  $$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) = \sum_{i=1}^{k} i + \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

  Pro součet druhých mocnin tak dostáváme

  $$1^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Analogicky lze pokračovat i v případě výpočtu součtu vyšších mocnin (volíme $n = 3, \dots$).

Tvrzení

Platí

a) $P(k_1, k_2, \dots, k_r) = C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{n-k_1-\dots-k_{r-2}}^{k_{r-1}}$.

b) $\sum_{k_1+\dots+k_r=n} P(k_1, k_2, \dots, k_r) = r^n$.

kde se sčítá přes všechny uspořádané r-tice $(k_1, \dots, k_r)$ přirozených čísel, jejichž součet je roven n (tj. přes všechny rozklady čísla n na r sčítanců, na jejichž pořadí záleží).

Důkaz.

ad a) Všechny permutace s opakováním z k_1 prvků 1. druhu, k_2 prvků 2. druhu, …, k_r prvků r-tého druhu lze sestavit následovně. Nejprve vybereme k_1 míst pro prvky 1. druhu, což lze provést $C_n^{k_1}$ různými způsoby (všechny pozice jsou zatím volné). Následně vybereme k_2 míst pro prvky 2. druhu. Tato místa již vybíráme z $(n - k_1)$ volných pozic, tj. $C_{n-k_1}^{k_2}$ způsoby. Analogicky postupujeme i v případě prvků ostatních druhů. Aplikací pravidla součinu pak dostáváme dokazovaný vztah.

ad b) Pravá strana b) je zřejmě rovna počtu všech variací n-té třídy s opakováním z r prvků $\{a_1, \dots, a_r\}$. Všechny zmíněné variace lze rozložit podle počtu prvků jednotlivých druhů do tříd. Počet tříd je zřejmě roven počtu uspořádaných r-tic přirozených čísel $(k_1, \dots, k_r)$, kde $k_1 + \dots + k_r = n$ a v každé takové třídě je $P(k_1, \dots, k_r)$ variací.

Pro potřeby počítačového modelování je třeba mít k dispozici algoritmy, které umožní efektivně a systematicky (tj. v jasně definovaném pořadí) generovat permutace, kombinace, resp. variace. Závěrečná část této kapitoly je věnována právě této problematice.

Definice - lexikografické uspořádání

Nechť $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ je uspořádaná abeceda, kde $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Potom uspořádání $\preccurlyeq$ na množině A^* konečných slov nad A definované pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A^*$, kde $\boldsymbol{x} = x_1 \dots x_m, \boldsymbol{y} = y_1 \dots y_k$ vztahy:

i) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \leftrightarrow (m = k) \land [\forall i \in \{1, \dots, m\}\, (x_i = y_i)]$,

ii) $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \leftrightarrow (x_1 < y_1) \lor$
$[\exists l \in \{2, \dots, \min\{m, k\}\}\, (x_1 = y_1, \dots, x_{l-1} = y_{l-1}) \land (x_l < y_l)] \lor$
$[(m < k) \land (\forall i \in \{1, \dots, m\}\, x_i = y_i)]$

nazýváme lexikografické uspořádání na A^*.

Lexikografické uspořádání je uspořádání, které odpovídá běžnému řazení slov ve slovníku. Právě v tomto pořadí bude následující algoritmus generovat permutace na množině $\{1,2, \dots, n\}$.

Algoritmus generování permutací řádu n v lexikografickém pořadí

$(x_1, x_2, \dots, x_n) := (1,2, \dots, n)$; (* generování startuje od nejmenší (lexikograficky) permutace *)

while $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (n, \dots, 2,1)$ *do*

$k := \max\limits_{1 \le i \le n-1} \{i | x_i < x_{i+1}\}$; (* v aktuální permutaci urči poslední pozici následovanou větším prvkem *)

$x'_1 := x_1; \dots; x'_{k-1} := x_{k-1}$; (* prvky na pozicích $1, \dots, k-1$ se v nově generované permutaci nemění *)

$x'_k := \min\limits_{k+1 \le i \le n} \{x_i | x_i > x_k\}$; (* v nově generované permutaci umísti na k-tou pozici nejmenší prvek aktuální permutace, který je větší než x_k a který následuje za k-tou pozici *)

$(x'_{k+1}, \dots, x'_n) :=$„zbývající prvky seřazené vzestupně“;

$(x_1, x_2, \dots, x_n) := (x'_1, x'_2, \dots, x'_n); print(x_1, x_2, \dots, x_n)$;

wend;

Příklad

- Vygenerujte prvních třináct (v lexikografickém uspořádání) permutací na množině $\{1,2,3,4\}$:

  $(1,2,\mathbf{3},4) \to (1,\mathbf{2},4,3) \to (1,3,\mathbf{2},4) \to (1,\mathbf{3},4,2) \to (1,4,\mathbf{2},3) \to (\mathbf{1},4,3,2) \to (2,1,\mathbf{3},4) \to$
  $(2,\mathbf{1},4,3) \to (2,3,\mathbf{1},4) \to (2,\mathbf{3},4,1) \to (2,4,\mathbf{1},3) \to (\mathbf{2},4,3,1) \to (3,1,2,4) \to \cdots$
  (tučně označený prvek odpovídá pozici k)
- Vygenerujte dvě bezprostředně po sobě jdoucí permutace (v lexikografickém uspořádání) následující permutaci $(3,1,4,2,7,6,5)$:

  $(3,1,4,\mathbf{2},7,6,5) \to (3,1,4,5,2,\mathbf{6},7) \to (3,1,4,5,2,7,6)$

Při generování kombinací je třeba vzít v úvahu skutečnost, že kombinace je množina, tj. nezáleží na pořadí prvků a proto nelze použít lexikografické uspořádání. Budeme je proto generovat v pořadí definovaném následujícím uspořádáním.
Pro libovolné konečné číselné množiny A, B definujeme: $A < B \leftrightarrow \min\{(A \cup B) - (A \cap B)\} \in A$.
(např. pro $A = \{6,3,2,5,7,8\}, B = \{7,3,2,4,8\}$ platí $B < A$)

Algoritmus generování kombinací řádu $\boldsymbol{k}$ na množině $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\dots,\boldsymbol{n}\}$
(přesto, že jsou kombinace neuspořádané k-tice, budeme je zapisovat jako uspořádané k-tice, tj. do okrouhlých závorek)

$(x_1,\dots,x_k) := (1,\dots,k)$; (* generování startuje od nejmenší kombinace, dle výše definovaného uspořádání *)
while $(x_1,\dots,x_k) \neq (n-k+1,\dots,n)$ *do*
$\quad m := \max\limits_{1 \le i \le k}\{i \mid \exists j \notin (x_1,\dots,x_k) \wedge (j > x_i)\}$; (* v aktuální permutaci urči poslední pozici $i \in \{1,\dots,k\}$ s vlastností - existuje prvek větší než x_i, který není v aktuální kombinaci *)
$\quad x'_1 := x_1; \dots; x'_{m-1} := x_{m-1}$; (* prvky na pozicích $1,\dots,m-1$ se v nově generované kombinaci nemění *)
$\quad x'_{m+i} := x_m + (i+1), i = 0,1,\dots,k-m$; (* obsazení zbývajících pozic v nově generované kombinaci *)
$\quad (x_1,\dots,x_k) := (x'_1,\dots,x'_k); print(x_1,\dots,x_k)$;
wend;

Příklad

- Pro $n = 5, k = 3$ vygenerujte všechny kombinace:

  $(1,2,\mathbf{3}) \to (1,2,\mathbf{4}) \to (1,\mathbf{2},5) \to (1,3,\mathbf{4}) \to (1,\mathbf{3},5) \to (\mathbf{1},4,5) \to (2,3,\mathbf{4}) \to (2,\mathbf{3},5) \to$
  $(\mathbf{2},4,5) \to (3,4,5)$
- Pro $n = 8, k = 5$ vygenerujte dvě kombinace bezprostředně následující kombinaci $(1,2,4,7,8)$:

  $(1,2,4,7,8) \to (1,2,5,6,7) \to (1,2,5,6,8)$

Algoritmus generování variací řádu $\boldsymbol{k}$ na množině $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\dots,\boldsymbol{n}\}$
Při generování variací k-té třídy z n prvků postupujeme následovně - postupně generujeme kombinace k-té třídy z n prvků a pro každou kombinaci vygenerujeme všechny její permutace. Popsaný způsob negeneruje variace v lexikografickém pořadí, nicméně jde o generování variací v jasně definovaném pořadí.

Příklad

Pro $n = 4, k = 3$ vygenerujte všechny variace:

$$\begin{array}{ccccccc}
(1,2,3) & \rightarrow & (1,2,4) & \rightarrow & (1,3,4) & \rightarrow & (2,3,4) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(1,3,2) & & (1,4,2) & & (1,4,3) & & (2,4,3) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(2,1,3) & & (2,1,4) & & (3,1,4) & & (3,2,4) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(2,3,1) & & (2,4,1) & & (3,4,1) & & (3,4,2) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(3,1,2) & & (4,1,2) & & (4,1,3) & & (4,2,3) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(3,2,1) & & (4,2,1) & & (4,3,1) & & (4,3,2)
\end{array}$$

1.4. Subfaktoriály, Catalanova čísla

V následující části odstavce se budeme věnovat několika kombinatorickým úlohám s omezujícími podmínkami. Při jejich řešení budou využívány postupy, které mají obecný charakter a jsou významné pro řešení celé řady dalších úloh.

Tvrzení

a) Označme $D(n)$ počet permutací řádu n, ve kterých nezůstává žádný prvek na svém místě. Potom platí

$$D(n) = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$$

b) Označme $D_k(n)$ počet permutací řádu n, ve kterých právě k $(0 \leq k \leq n)$ prvků, zůstává na svém místě. Potom platí

$$D_k(n) = C_n^k D(n-k).$$

Důkaz.

ad a) Označme $N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$ počet permutací, ve kterých prvky $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ zůstávají na svém místě a $N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ počet permutací, kdy žádný prvek nezůstává na svém místě. Aplikací principu IE dostáváme

$$D(n) = N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = N - \left[\textstyle\sum_{1 \leq i \leq n} N(\alpha_i)\right] + \left[\textstyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})\right] + \cdots$$

$$\dots + (-1)^k \left[\textstyle\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})\right] + \cdots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Pro jednotlivé počty permutací zřejmě platí:

$N = n!$ … celkový počet permutací řádu n,

$N(\alpha_i) = (n-1)!$ … počet permutací, ve kterých zůstává prvek a_i na svém místě, zbývajících $(n-1)$ prvků lze umístit libovolně,

$N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) = (n-2)!$ … počet permutací, ve kterých prvky a_{i_1}, a_{i_2} zůstávají na svém místě, zbývajících $(n-2)$ prvků lze umístit libovolně,

$N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}) = (n-k)!$ … počet permutací, ve kterých k prvků $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ zůstává na svém místě, zbývajících $(n-k)$ lze umístit libovolně,

$N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0!$ … počet permutací, kde zůstávají všechny prvky na svém místě.

Odtud

$$D(n) = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! + \cdots + C_n^k(n-k)! + \cdots + C_n^n 0!$$

a po snadné úpravě

$$D(n) = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$$

ad b) Prvky (v počtu k), které zůstávají na svém místě lze vybrat C_n^k způsoby, zbývajících $(n-k)$ prvků je možné umístit $D(n-k)$ způsoby tak, že nejsou na svém místě. Aplikací pravidla součinu pak dostáváme dokazovaný vztah.

Pozorný čtenář si jistě uvědomí, že hranatá závorka ve vztahu pro $D(n)$ obsahuje prvních $(n+1)$ členů rozvoje e^{-1}. Jelikož řada uvedená v závorce konverguje rychle, lze pro $n \geq 2$ použít k výpočtům vztah

$$D(n) = round\left(\frac{n!}{e}\right),$$

kde $round(\quad)$ je funkce zaokrouhlení.

Definice - subfaktoriály

Čísla $D(n), n \in N$ definovaná ve výše uvedeném tvrzení nazýváme subfaktoriálem (řádu n).

Jak vyplyne z níže uvedeného tvrzení, mají subfaktoriály $D(n)$ mnohé vlastnosti podobné faktoriálům $P(n)$.

Tvrzení

Platí:

a) $D(n) = (n-1)[D(n-1) + D(n-2)]$, kde $D(0) = 1, D(1) = 0$,

b) $D(n) = nD(n-1) + (-1)^n$, kde $D(0) = 1$,

c) $P(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D(n-k)$.

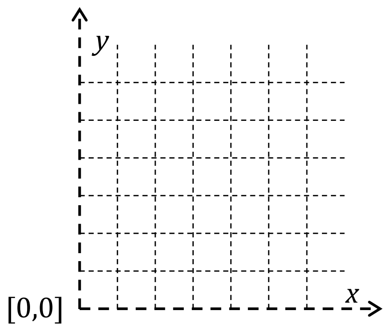
Důkaz.

ad a) Označme A množinu všech permutací na $\{a_1, \dots, a_n\}$, ve kterých nezůstává žádný prvek na svém místě. Tuto množinu lze rozložit do $(n-1)$ tříd $A_2, \dots, A_n$, kde A_i obsahuje právě všechny permutace z A, které mají na první pozici prvek a_i. Vzhledem k tomu, že všechny třídy mají stejný počet prvků (důsledek „symetrie“), pro libovolné i platí $D(n) = (n-1)|A_i|$. Nyní stačí určit počet permutací, např. ve třídě A_2. Třídu A_2 rozložíme na dvě podmnožiny A_2^0, A_2^1, kde A_2^0 obsahuje všechny permutace z A_2, ve kterých je na druhé pozici a_1 a na zbývajících $(n-2)$ pozicích není žádný prvek na svém místě. Odtud $\left|A_2^0\right| = D(n-2)$. Podmnožina A_2^1 obsahuje všechny zbývající permutace z A_2 (na první pozici je a_2, na druhé není a_1 a na zbývajících pozicích není žádný prvek na svém místě). Odtud $\left|A_2^1\right| = D(n-1)$ a tedy platnost dokazovaného tvrzení je zřejmá.

ad b) Označme $h_n = D(n) - nD(n-1)$. Snadnou úpravou (dosazením do a)) dostáváme $h_n = (-1)h_{n-1}$, tedy $h_n = (-1)^{n-2}h_2$, kde $h_2 = D(2) - 2D(1) = 1$. Odtud $D(n) - nD(n-1) = (-1)^n$ a po zřejmé úpravě dostáváme dokazovaný vztah.

ad c) Množinu všech permutací řádu n lze rozložit do $(n+1)$ tříd $A_0, \dots, A_n$, kde A_i obsahuje všechny permutace, kde zůstává právě i prvků na svém místě. Odtud s ohledem na předchozí tvrzení dostáváme $P(n) = \sum_{k=0}^{n} D_k(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D(n-k)$.

Příklad



Uvažujme rovinnou síť znázorněnou na sousedním obrázku a předpokládejme, že pohyb v síti je realizován pouze pomocí dvou typů tahů $[x, y] \rightarrow [x+1, y]$ a $[x, y] \rightarrow [x, y+1]$. Spočtěte, kolik existuje různých cest z bodu $[0,0]$ do bodu $[m, n]$.

Řešení.

Pro potřeby důkazu označme tah $[x, y] \rightarrow [x+1, y]$ symbolem 0 a tah typu $[x, y] \rightarrow [x, y+1]$ symbolem 1. Nyní je zřejmé, že každé cestě (používající pouze tahy typu 0 a 1) lze jednoznačně přiřadit bitový řetězec délky $(m+n)$, který obsahuje právě m nul a n jedniček. Naopak, každý bitový řetězec obsahující m nul a n jedniček definuje jedinou cestu z bodu $[0,0]$ do bodu $[m,n]$ a proto počet uvažovaných cest je roven počtu všech permutací s opakováním, které se skládají z m nul a n jedniček, tj. $P(m,n) = C_{m+n}^{m}$.

Příklad

Uvažujme rovinnou síť z předcházejícího příkladu, ve které se pohybujeme pomocí stejných typů kroků, tj. $0: [x,y] \to [x+1,y]$ a $1: [x,y] \to [x,y+1]$. Spočtěte, kolik existuje různých cest z bodu $[0,0]$ do bodu $[n,n]$, které nepřekročí diagonálu.
(Diagonálu tvoří body $[x,y]$, pro které $x=y$, tj. nepřekročíme diagonálu, pokud pro souřadnice $[x,y]$ všech bodů cesty platí $x \geq y$).
Řešení.
Hledaný počet povolených cest (nepřekročí diagonálu a vedou z $[0,0]$ do $[n,n]$) označíme C_n a určíme ho jako doplněk počtu zakázaných cest Z_n (cesta překročí diagonálu). Platí proto $C_n = C_{2n}^{n} - Z_n$. Počet Z_n určíme následující kombinatorickou úvahou. Označme $a_1, \dots, a_k, \dots, a_{2n}$ bitový řetězec reprezentující zakázanou cestu a k index, kde cesta prvně překročí diagonálu. V tomto okamžiku je poprvé počet jedniček v prefixu $a_1, \dots, a_k$ o jedničku větší než počet nul (číslo k je proto liché). V této chvíli přidejme na začátek uvažovaného bitového řetězce 0. Tím dostáváme bitový řetězec $0, a_1, \dots, a_k, \dots, a_{2n}$, který má v prefixu $0, a_1, \dots, a_k$ stejný počet 1 i 0. Dále v uvažovaném prefixu zaměňme 0 a 1. Dostáváme tak bitový řetězec $1, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k, a_{k+1}, \dots, a_{2n}$, kde $\bar{a}_i = 0$, jestliže $a_i = 1$ a $\bar{a}_i = 1$ v ostatních případech. Tento nový bitový řetězec začíná 1, obsahuje $(n+1)$ nul a n jedniček. Snadno nahlédneme, že každé zakázané cestě lze takto jednoznačně přiřadit bitový řetězec uvedených vlastností (dvěma různým zakázaným cestám zřejmě odpovídají i různé bitové řetězce). Nyní je podstatné si uvědomit, že každý bitový řetězec $b_0, b_1, \dots, k_k, \dots, b_{2n}$ uvedených vlastností (tj. začíná 1, obsahující $(n+1)$ nul a n jedniček) definuje zakázanou cestu, kterou lze zkonstruovat následovně. Nechť k označuje pozici, kde se poprvé vyrovná počet 1 a 0 (tato situace musí nutně nastat - zdůvodněte). Nyní v prefixu $b_0, b_1, \dots, k_k$ zaměníme 0 a 1 a odstraníme úvodní 0. Získáme tak bitový řetězec $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k, b_{k+1}, \dots, b_{2n}$, který reprezentuje zakázanou cestu (poprvé překročí diagonálu na pozici k). Tím jsme také dokázali, že počet zakázaných cest je roven počtu bitových řetězců délky $(2n+1)$, které začínají 1, obsahují $(n+1)$ nul a n jedniček, tj. $Z_n = P(n-1, n+1) = C_{2n}^{n-1}$. Pro počet povolených cest tak dostáváme $C_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$.

Definice - Catalanova posloupnost

Catalanovou posloupností budeme nazývat posloupnost $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$$

a její členy budeme nazývat Catalanovými čísly.

Poznámky

Catalanova posloupnost patří mezi „prominentní“ kombinatorické posloupnosti a je řešením celé řady úloh.

- Snadno nahlédneme, že počet způsobů jak správně uzávorkovat součin $x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ je roven C_n.
  (Řádně zdůvodněte. Návod - každou levou závorku reprezentujte symbolem 0 a pravou symbolem 1.)
  Speciálně pro $n = 3$ dostáváme $C_3 = 5$ následujících možnost:
  $\Big(\big((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2\big) \cdot x_3\Big)$ $\big((x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3)\big)$ $\Big(\big(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)\big) \cdot x_3\Big)$
  $\Big(x_0 \cdot \big((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3\big)\Big)$ $\Big(x_0 \cdot \big(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)\big)\Big)$
- Počet permutací řádu n, které lze realizovat pomocí zásobníku (do zásobníku jsou postupně vkládána čísla $1, 2, \dots, n$ a mohou být kdykoliv vybírána), je roven C_n.
  (Řádně zdůvodněte. Návod - každou operaci PUSH reprezentujte symbolem 0 a POP symbolem 1.)

1.5. Binomická a multinomická věta, Newtonův vzorec

Velmi důležitou „kombinatorickou identitou“ je známá binomická věta a její zobecnění ve formě multinomické věty a Newtonova vzorce.

Tvrzení - binomická a multinomická věta

a) Binomická věta - pro libovolná reálná x, y a přirozené n platí

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i}.$$

b) Multinomická věta - pro libovolná reálná $x_1, \dots, x_r$ a přirozené n platí

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{n_1+\dots+n_r=n} P(n_1, \dots, n_r) \cdot x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_r^{n_r},$$

kde součet se provádí přes všechny uspořádané r-tice přirozených čísel $(n_1, \dots, n_r)$, jejichž součet je roven n, tj. $n_1 + \dots + n_r = n$.

Důkaz.

ad a) Roznásobením výrazu $\underbrace{(x+y)}_{1.\ \text{člen}} \cdot \underbrace{(x+y)}_{2.\ \text{člen}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(x+y)}_{n.\ \text{člen}}$ dostaneme 2^n členů obsahujících n symbolů (z každé závorky právě jeden) a tvořící zřejmě všechny variace n-té třídy s opakováním ze dvou prvků x, y. Dále je evidentní, že počet členů ve kterých se vyskytuje i-krát symbol x a $(n-i)$-krát symbol y je roven $P(i, n-i)$. Po jejich sloučení dostáváme jako koeficient u $x^i y^{n-i}$ právě $P(i, n-i) = C_n^i$.

ad b) Zcela analogický k části a).
Roznásobením výrazu $\underbrace{(x_1 + \dots + x_r)}_{1.\ \text{člen}} \cdot \underbrace{(x_1 + \dots + x_r)}_{2.\ \text{člen}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(x_1 + \dots + x_r)}_{n.\ \text{člen}}$ dostáváme všechny variace n-té třídy s opakováním z r prvků $x_1, \dots, x_r$. Po sloučení členů se stejnými mocninami dostáváme jako koeficient u $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_r^{n_r}$ počet permutací s opakováním řádu $(n_1, \dots, n_r)$, tj. $P(n_1, \dots, n_r)$.

Příklad

Uvažujte rozvinutý tvar výrazu $\left(2x - \frac{\sqrt{y}}{3}\right)^{10}$. Určete koeficient: i) u členu $x^4 y^3$, ii) u členu $(xy)^5$, iii) u členu obsahujícího x^3.

Řešení.

ad i) Z binomické věty plyne, že člen obsahující $x^4 y^3$ má tvar $C_{10}^4 (2x)^4 \left(-\frac{\sqrt{y}}{3}\right)^6$ a tedy hledaný koeficient je

$C_{10}^4 \cdot 2^4 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^6 = \frac{1120}{243} \doteq 4{,}60905.$

ad ii) Uvedený člen se v rozvoji nevyskytuje, tedy koeficient je roven 0.

ad iii) V rozvoji daného výrazu existuje jediný člen obsahující x^3, který má tvar $x^3 y^3 \sqrt{y}$. Snadno tak dopočteme, že hledaný koeficient je $C_{10}^3 \cdot 2^3 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^7 = -\frac{320}{729} \doteq -\,0{,}43896.$

Příklad

Uvažujte rozvinutý tvar výrazu $\left(5x + (2y)^2 - 3\sqrt{u}\right)^6$.

Určete: a) koeficient u členu xy^2u^2, b) součet koeficientů u členů obsahujících y^8.

Řešení.

ad a) $P(1,1,4) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot (-3)^4 = 48\,600$

ad b)
$$\left.\begin{array}{l} P(2,4,0) \cdot 5^2 \cdot (2^2)^4 = 96000 \\ P(1,4,1) \cdot 5 \cdot (2^2)^4 \cdot (-3) = -115200 \\ P(0,4,2) \cdot (2^2)^4 \cdot (-3)^2 = 34560 \end{array}\right\} \to 15360$$

Poznámka

Binomická a multinomická věta (jak uvidíme později, jde o vytvořující funkce) má velmi široké možnosti využití, např. jako účinný nástroj při řešení celé řady méně triviálních úloh. Pro ilustraci uvedeme důkazy vztahů a), c) z prvního tvrzení odstavce 1.3.

ad a) Dosazením $x = -1, y = 1$ do binomické věty dostáváme

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot (-1)^i \cdot 1^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \,.$$

ad c) Aplikací binomické věty na zřejmou identitu $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n$ dostáváme

$$\sum_{i=0}^{m+n} C_{m+n}^i \cdot x^i = \left(\sum_{i=0}^{m} C_m^i \cdot x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} C_n^j \cdot x^j\right).$$

Porovnáním koeficientů u x^k na obou stranách dostáváme $C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}, k \leq \min\{m,n\}$.

Binomická věta je speciálním případem následujícího tvrzení, které bývá označované jako Newtonův vzorec.

Tvrzení - Newtonův vzorec

Pro libovolná $x, \alpha \in R, |x| < 1$ platí

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \cdots$$

Snadno ověříme, že pro $\alpha = n \in N$ je koeficient u x^k roven právě binomickému koeficientu C_n^k (koeficienty všech členů $x^k, k > n$ jsou nulové, tudíž dostáváme binomickou větu). V případě, kdy exponent je záporné celé číslo, budeme psát $\alpha = -n$, kde $n \in N^+$ a (1.27) má tvar

$$(1+x)^{-n} = 1 - C_n^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \cdots + (-1)^k C_{n+k-1}^k x^k + \cdots$$

Koeficient u x^k je tedy roven C_{-n}^k, což plně odpovídá již dříve uvedené definici rozšířených binomických koeficientů.

Příklad

Uvažujte rozvoj výrazu $\sqrt[3]{(5-4x^3)^2}$. Určete: a) koeficient u x^{12}, b) koeficient u x^{13}.

Řešení.

Zřejmě $\sqrt[3]{(5-4x^3)^2} = 5^{2/3}\left(1 - \frac{4}{5}x^3\right)^{2/3}$

ad a) Využitím Newtonova vzorce dostáváme $\left(\alpha = {}^2/_3\right)$ pro hledaný koeficient

$$5^{2/3} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-3\right)}{4!} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^4 = -\frac{1792}{30375\sqrt[3]{5}} \doteq -0{,}0345$$

ad b) Uvedený člen se v rozvoji nevyskytuje, tedy koeficient je roven 0.

2. Rozklady

Základní úlohu z oblasti rozkladů lze formulovat následovně – určete počet rozkladů dané konečné množiny. V závislosti na „omezujících“ podmínkách, např. prvky množiny (alternativně označované také jako objekty) jsou (ne)rozlišitelné, třídy rozkladu považujeme za (ne)rozlišitelné, (ne)zadán počet tříd rozkladu, omezení počtu prvků v jednotlivých třídách apod., dostáváme následující základní typy rozkladových úloh.

2.1. Rozklady nerozlišitelných objektů do rozlišitelných tříd

Úloha - určete počet rozkladů množiny obsahující n nerozlišitelných objektů do rozlišitelných tříd.

Tvrzení

a) Počet rozkladů množiny obsahující n nerozlišitelných objektů do k rozlišitelných tříd, jestliže připouštíme i prázdné třídy rozkladu, je roven počtu řešení diofantické rovnice

$$x_1 + \cdots + x_k = n,$$

která vyhovují podmínkám $\forall i\ x_i \in N$.

b) Počet řešení výše uvedené rovnice je roven $P(n, k-1) = C_{n+k-1}^{k-1}$.

Důkaz.

ad a) Zřejmé, pokud x_i interpretujeme jako počet objektů v i-té třídě rozkladu.

ad b) Každý rozklad lze jednoznačně reprezentovat bitovým řetězcem délky $n + k - 1$, který obsahuje $(k-1)$ bitů nastavených na 0 (tvoří oddělovače pro k tříd rozkladu) a n bitů nastavených na 1, kde každá 1 zastupuje právě jeden objekt v dané třídě rozkladu.

Další variantou této úlohy je situace, kdy předepíšeme minimální počty objektu v jednotlivých třídách. V tomto případě platí následující tvrzení.

Tvrzení

a) Počet rozkladů množiny obsahující n nerozlišitelných objektů do k rozlišitelných tříd, jestliže požadujeme, aby i-tá třída $(1 \le i \le k)$ rozkladu obsahovala alespoň a_i objektů, je roven počtu celočíselných řešení diofantické rovnice

$$x_1 + \cdots + x_k = n,$$

která vyhovují podmínkám $\forall i\ 0 \le a_i \le x_i$.

b) Počet řešení výše uvedené rovnice je roven $P\left(n - \sum_{i=1}^{k} a_i\,, k-1\right) = C_{n+k-1-\sum_{i=1}^{k} a_i}^{k-1}$.

Důkaz.

Analogicky k důkazu předchozího tvrzení interpretujeme $(k-1)$ nulových bitů jako oddělovače k tříd, které nejprve „naplníme“ povinným minimálním počtem objektů a_i. Následně rozdělíme zbývajících $n - \sum_{i=1}^{k} a_i$ objektů (reprezentované 1) libovolně do k tříd.

Obecnou variantou předchozích úloh je situace, kdy zadáme dolní i horní omezení počtu objektů v jednotlivých třídách rozkladu. V tomto případě hledáme počet celočíselných řešení diofantické rovnice

$$x_1 + \cdots + x_k = n,$$

která vyhovují podmínkám $\forall i\ a_i \le x_i \le b_i\ (a_i, b_i \in Z)$.

Poznámka

Počet celočíselných řešení výše uvedené rovnice stanovíme obvykle následovně:
Nejprve převedeme podmínky $\forall i\ a_i \le x_i \le b_i$ na tvar $\forall i\ 0 \le x_i - a_i \le b_i - a_i$.

Označíme-li nyní $y_i = x_i - a_i, c_i = b_i - a_i$ a $m = n - \sum_{i=1}^{k} a_i$, dostáváme se k ekvivalentní rovnici

$$y_1 + \cdots + y_k = m,$$

s podmínkami $\forall i \;\; 0 \le y_i \le c_i$.

Hledaný počet řešení pak stanovíme pomocí principu inkluze a exkluze, tj. dle vztahu

$$N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k) = N - \left[\sum_{i=1}^{k} N(\alpha_i)\right] + \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k} N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}\right)\right] - \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le k} N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}\right)\right] + \dots + (-1)^k N(\alpha_1, \dots, \alpha_k),$$

kde $\alpha_i \colon c_i + 1 \le y_i, i = 1, \dots, k,$

$\bar{\alpha}_i \colon 0 \le y_i \le c_i,$

$N\left(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_j}\right), j = 1, \dots, k$ označuje počet řešení vyhovující podmínkám $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_j}$ a

$N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k)$ je počet hledaných řešení, tj. vyhovujících podmínkám $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k$.

Příklad

Nalezněte počet celočíselných řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8,$$

kde $0 \le x_1$, $-4 < x_2 < 5$, $2 \le x_3 \le 6$, $-4 \le x_4 < -1$, $0 < x_5 \le 7$.

Řešení.

Nejprve omezující podmínky transformujeme na ekvivalentní tvar s dolní mezí rovnou 0. Dostáváme

$$0 \le x_1,\; 0 \le x_2 + 3 \le 7,\; 0 \le x_3 - 2 \le 4,\; 0 \le x_4 + 4 \le 2,\; 0 \le x_5 - 1 \le 6.$$

Nyní provedeme substituci $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 + 3$, $y_3 = x_3 - 2$, $y_4 = x_4 + 4$, $y_5 = x_5 - 1$, která převede původní rovnici na tvar

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 12 \qquad (*)$$

s podmínkami $0 \le y_1$, $0 \le y_2 \le 7$, $0 \le y_3 \le 4$, $0 \le y_4 \le 2$, $0 \le y_5 \le 6$.

Pro potřeby principu inkluze a exkluze použijme následující označení (negace omezujících podmínek s definovanou horní mezí): $\alpha_1 \colon 8 \le y_2$, $\alpha_2 \colon 5 \le y_3$, $\alpha_3 \colon 3 \le y_4$, $\alpha_4 \colon 7 \le y_5$. Hledáne tedy počet řešení $N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4)$ rovnice $(*)$, která nesplňují žádnou z podmínek $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Z principu inkluze a exkluze dostáváme

$$N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4) = N - \sum_{i=1}^{4} N(\alpha_i) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 4} N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_2\right) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 4} N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_2, \alpha_3\right) + \\ + N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4),$$

kde N je počet všech řešení $(0 \le y_i)$,

$N(\alpha_i)$ je počet řešení vyhovující podmínce α_i, jinde $0 \le y_j$ pro $j \ne i$,

$N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}\right)$ je počet řešení vyhovující podmínám $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}$, jinde $0 \le y_j$ pro $j \ne i_1, i_2$,

$N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}\right)$ je počet řešení vyhovující podmínám $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}$, jinde $0 \le y_j$ pro $j \ne i_1, i_2, i_3$,

$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ je počet řešení vyhovující podmínkám $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Pro výše uvedené dostáváme (viz předchozí věta) následující hodnoty

$N = P(4{,}12) = 1820;$

$N(\alpha_1) = P(4{,}12 - 8) = 70;$ $\qquad N(\alpha_2) = P(4{,}12 - 5) = 330;$

$N(\alpha_3) = P(4{,}12 - 3) = 715;$ $\qquad N(\alpha_4) = P(4{,}12 - 7) = 126;$

$N(\alpha_1, \alpha_2) = N(\alpha_1, \alpha_4) = 0;$ $\qquad N(\alpha_1, \alpha_3) = P(4{,}12 - 8 - 3) = 5;$

$N(\alpha_2, \alpha_3) = P(4{,}12 - 5 - 3) = 70;$ $\qquad N(\alpha_2, \alpha_4) = P(4{,}12 - 5 - 7) = 1;$

$N(\alpha_3, \alpha_4) = P(4{,}12 - 3 - 7) = 15;$

$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = N(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4) = N(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0;$

Tedy pro hledaný počet řešení platí $N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4) = 670$

2.2. Rozklady nerozlišitelných objektů do nerozlišitelných tříd

Úloha - určete počet rozkladů množiny obsahující n nerozlišitelných objektů do nerozlišitelných tříd.

Tvrzení

Počet rozkladů množiny obsahující n nerozlišitelných objektů do nerozlišitelných tříd (jejichž počet není předepsán), je roven:

a) Počtu rozkladů přirozeného čísla n na součet přirozených sčítanců.

b) Počtu řešení diofantické rovnice

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = n$$

v oboru přirozených čísel (tj. $\forall i\ x_i \in N$).

Důkaz.

ad a) Zřejmé - každý sčítanec reprezentuje počet prvků třídy rozkladu (nezáleží na pořadí sčítanců, neboť sčítání je komutativní, sčítanci se stejnou hodnotou jsou nerozlišitelní).

ad b) S ohledem na a) stačí označit počet sčítanců o velikosti i symbolem x_i $(1 \leq i \leq n)$.

Další variantou výše uvedené úlohy o rozkladu přirozeného čísla n na kladné sčítance je předepsání hodnot, kterých sčítanci mohou nabývat (v základní variantě to jsou hodnoty $1,2, \dots, n$).

Tvrzení

Počet rozkladů přirozeného čísla n na sčítance rovné některým z přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$, je roven počtu řešení diofantické rovnice

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = n$$

v oboru přirozených čísel (tj. $\forall i\ x_i \in N$).

Důkaz.

Analogicky předchozímu tvrzení stačí interpretovat x_i jako počet sčítanců rovných číslu a_i.

Poznámka

Je zřejmé, že přirozené číslo n nemusí být vždy rozložitelné na součet využívající pouze zadaných sčítanců $a_1, \dots, a_k$. Snadno se přesvědčíme, že např. číslo 353 nelze vyjádřit ve tvaru součtu, kde sčítance se mohou opakovat, ale mohou být rovny pouze některým z čísel 9, 12, 21, 33. Připomeňme, že kritériem řešitelnosti je v tomto případě podmínka $NSD(a_1, \dots, a_k)|n$, kde NSD označuje největšího společného dělitele.

Příklad

Určete počet způsobů, jak lze vyplatit částku $5n$ Kč pomocí mincí v hodnotě 5 Kč, 10 Kč, 20 Kč.

Řešení.

Úloha je zřejmě ekvivalentní s úlohou určit počet řešení rovnice $5x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 5n$ $(n \in N)$ v oboru přirozených čísel. Snadno zjistíme, že zadaným podmínkám vyhovují uspořádané trojice tvaru

$$(x_1, x_2, x_3) = (n - 2t - 4u, t, u),$$

kde $0 \leq n - 2t - 4u$ a $t, u \in N$. Odtud pro hledaný počet způsobů jak rozměnit zadanou částku $5n$ Kč pomocí mincí v hodnotě 5 Kč, 10 Kč, 20 Kč dostáváme vztah

$$\sum_{t=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n-2t}{4} \right\rfloor + 1 \right) = \left(\lfloor n/4 \rfloor + 1 \right)\left(\lfloor n/2 \rfloor - \lfloor n/4 \rfloor + 1 \right),$$

kde $\lfloor \quad \rfloor$ označuje funkci dolní celá část. Např. částku 500 Kč lze rozměnit pomocí 5, 10, 20 Kč mincí 676 různými způsoby.

2.3. Stirlingova čísla

Další třídu rozkladových úloh tvoří problematika rozkladu množiny rozlišitelných prvků. Základní výsledky jsou obsahem tohoto odstavce a stručně pojednávají o tzv. Stirlingových číslech.

Definice – Stirlingova čísla 2. druhu

Počet, kolika způsoby lze rozložit množinu obsahující n různých prvků do k neprázdných tříd, kde na pořadí tříd ani prvků v třídách nezáleží, značíme $S(n,k)$ a nazýváme Strlingovo číslo 2. druhu řádu n,k.

Poznámky

- V kontextu rozkladů se místo pojmu Stirlingovo číslo 2. druhu běžně používá termín Stirling subset number (řádu n,k) a značí se $\left\{ n \atop k \right\}$, tj. $S(n,k) = \left\{ n \atop k \right\}$. Oba názvy i symboly budeme běžně používat jako ekvivalenty. Nicméně označení pomocí složených závorek budeme preferovat, neboť je návodné a zdůrazňuje skutečnost, že jde o třídy rozkladu, které chápeme jako množiny, tedy nezáleží na pořadí prvků v třídách rozkladu (na rozdíl od níže zavedených Stirling cycle numbers).
- Pro některé hodnoty $n,k \in N$ je snadné určit $\left\{ n \atop k \right\}$ explicitně. Platí:

  $\left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1$, $\quad \left\{ n \atop 0 \right\} = 0$, pro $n \in N^+$, $\quad \left\{ n \atop 1 \right\} = 1$, pro $n \in N^+$,

  $\left\{ n \atop 2 \right\} = 2^{n-1} - 1$, pro $2 \leq n$, $\quad \left\{ n \atop n-1 \right\} = \frac{n(n-1)}{2}$, pro $n \in N^+$, $\quad \left\{ n \atop n \right\} = 1$, pro $n \in N$.

  (řádně zdůvodněte!)

Tvrzení

Pro Stirlingova čísla 2. druhu (Stirling subset numbers) platí pro $1 \leq k \leq n$ rekurentní vztah

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\}.$$

(s počátečními podmínkami uvedenými v předchozí poznámce)

Důkaz.

Označme $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ množinu rozkládanou do k neprázdných tříd. Uvažované rozklady rozdělíme do dvou disjunktních skupin následovně – první obsahuje rozklady, kde libovolný pevně zvolený prvek, např. a_1, tvoří samostatnou třídu rozkladu a druhou zbývající rozklady (tj. rozklady, kde prvek a_1 je obsažen ve třídě rozkladu obsahující alespoň 2 prvky). Snadno zjistíme, že v první skupině existuje $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$ rozkladů (prvek a_1 tvoří samostatnou třídu rozkladu a je proto třeba rozložit $n-1$ zbývajících prvků do $k-1$ tříd). Počet rozkladů ve druhé skupině je zřejmě roven $k\left\{ n-1 \atop k \right\}$. Všechny prvky kromě a_1 (tj. celkem $n-1$ prvků) rozložíme do k tříd a následně prvek a_1 přidáme k některé z k již existujících tříd.

Poznámka - trojúhelník Stirlingových čísel 2. druhu/Stirling subset numbers

Stirlingova čísla 2. druhu $\left\{ n \atop k \right\}, 0 \leq k \leq n$ lze uspořádat do schématu uvedeného v příloze - tabulka 3.6, které je analogií Pascalova trojúhelníku pro kombinační čísla $C_n^k, 0 \leq k \leq n$. Hodnoty počítáme z výše uvedeného rekurentního vztahu (a z počátečních podmínek).

Definice - Bellova čísla

Počet všech rozkladů konečné n-prvkové množiny značíme $B_n, n \in N$ a nazýváme Bellovo číslo.

Poznámka

- Každý rozklad množiny jednoznačně definuje relaci ekvivalence na této množině a tedy Bellova čísla $B_n, n \in N$ lze interpretovat také jako počet ekvivalencí na n-prvkové množině.
- Je zřejmé, že pro Bellova čísla platí $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\}$, tj. B_n je součtem n-tého řádku výše uvedeného trojúhelníka Stirlingových čísel 2. druhu.

Definice – Stirling cycle numbers

Počet, kolika způsoby lze rozložit množinu obsahující n různých prvků do k neprázdných cyklů značíme $\left[n \atop k \right]$ a nazýváme Stirling cycle number[1] řádu n, k.

Poznámky

- Jak Stirling subset numbers $\left\{ n \atop k \right\}$, tak i Stirling cycle numbers $\left[n \atop k \right]$ se vztahují k rozkladům n-prvkové množiny na k neprázdných nerozlišitelných tříd, resp. do k cyklů. Rozdíl spočívá v tom, že v případě Stirling subset numbers nezáleží na pořadí prvků v jednotlivých třídách rozkladu, kdežto v případě Stirling cycle numbers jsou prvky každé třídy rozkladu uspořádány na kružnici a tedy záleží na tom, jak jsou na kružnici uspořádaný. Pro libovolná $0 \le k \le n$ proto zřejmě platí $0 \le \left\{ n \atop k \right\} \le \left[n \atop k \right]$.
- Stirling cycle number $\left[n \atop k \right]$ lze interpretovat jako počet permutací na n-prvkové množině, které lze zapsat pomocí k disjunktních cyklů, tudíž platí $\sum_{k=0}^{n} \left[n \atop k \right] = n!$
- Pro některé hodnoty $n, k \in N$ je snadné určit $\left[n \atop k \right]$ explicitně. Platí:

  $\left[0 \atop 0 \right] = 1$, $\left[n \atop 0 \right] = 0$, pro $n \in N^+$, $\left[n \atop 1 \right] = (n-1)!$, pro $n \in N^+$,

  $\left[n \atop n-1 \right] = \frac{n(n-1)}{2}$, pro $n \in N^+$, $\left[n \atop n \right] = 1$, pro $n \in N$. (řádně zdůvodněte!)

Tvrzení

Pro Stirling cycle numbers platí pro $1 \le k \le n$ rekurentní vztah

$$\left[n \atop k \right] = \left[n-1 \atop k-1 \right] + (n-1) \left[n-1 \atop k \right].$$

(s počátečními podmínkami uvedenými v předchozí poznámce)

Důkaz.

Zcela analogický důkazu předchozího tvrzení, tj. spočteme počet rozkladů, kde prvek a_1 tvoří samostatný cyklus, plus počet rozkladů, kde prvek a_1 je součástí cyklu délky alespoň 2.

Definice - padající faktoriál

Nechť $x \in R, n \in N$. Potom symbolem $x^{\underline{n}}$ označujeme tzv. padající faktoriál (faktorial power, falling power) definovaný vztahem

$$x^{\underline{n}} = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n+1),$$

kde definujeme $x^{\underline{0}} = 1$

Poznámky – Stirlingova čísla 1. a 2. druhu

- Je zřejmé, že padající faktoriál $x^{\underline{n}}$ je polynom stupně n a lze ho proto psát ve tvaru

  $$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \cdot x^k .$$

  Koeficienty $s(n,k)$ se nazývají Stirlingova čísla 1. druhu.

[1] Vzhledem k tomu, že v češtině není dosud ustálen vhodný překlad, budeme dále používat anglickou terminologii.

Mezi Stirlingovými čísly 1. druhu a Stirling cycle numbers platí vztah

$$s(n,k) = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix},$$

tedy

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot x^k.$$

- Snadno lze ukázat i obrácené tvrzení, že mocninu $x^n, n \in N$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace padajících faktoriálů $x^{\underline{k}}, k = 0,1, \dots, n$, tj. ve tvaru

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \cdot x^{\underline{k}} .$$

Koeficienty $S(n,k)$ se jsou právě Stirlingova čísla 2. druhu, resp. Stirling subset numbers a platí již zmíněný vztah $S(n,k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$, takže lze také psát $x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot x^{\underline{k}}$.

Příklad

a) Vyjádřete $x^{\underline{7}}$ ve tvaru polynomu.

b) Vyjádřete x^7 ve tvary lineární kombinace padajících faktoriálů.

Řešení.

ad a) Z výše uvedené poznámky dostáváme

$$x^{\underline{7}} = x^7 - 21x^6 + 175x^5 - 735x^4 + 1624x^3 - 1764x^2 + 720x.$$

Správnost ověřte z definice, tj. roznásobením výrazu $x^{\underline{7}} = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$.

ad b) Vzhledem k výše uvedené poznámce dostáváme

$$x^7 = x^{\underline{7}} + 21x^{\underline{6}} + 140x^{\underline{5}} + 350x^{\underline{4}} + 301x^{\underline{3}} + 63x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

Správnost ověřte dosazením výrazů pro $x^{\underline{k}}, k = 1, \dots 7$ a následným roznásobením.

3. Rekurentní vztahy

Posloupnost je jedním ze základních pojmů, který budeme v těchto skriptech používat. V následující poznámce proto tento pojem (a pojmy související) stručně připomeneme.

Poznámky

- Posloupností rozumíme libovolné zobrazení množiny přirozených čísel N do množiny reálných (resp. komplexních čísel). Posloupnost budeme obvykle značit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, resp. $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ (členy číslujeme od 0).
- Na množině všech posloupností se zavádí operace sčítání posloupností a násobení posloupnosti skalárem (reálným, resp. komplexním číslem) následovně:
  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} + \{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$, (tj. posloupnosti sčítáme člen po členu)
  $\alpha\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\alpha a_n\}_{n=0}^{\infty}$. (tj. každý člen posloupnosti vynásobíme číslem α)
  V této souvislosti připomeňme, že množina všech posloupností tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných, resp. komplexních čísel. Této skutečnosti budeme využívat a běžně používat následující pojmy (známé z lineární algebry): vektorový prostor/podprostor, lineární kombinace posloupností, lineárně (ne)závislá množina posloupností, báze, dimenze atd.
- Posloupnost můžeme definovat v zásadě třemi způsoby - zadáním explicitního výrazu pro její n-tý člen (např. $a_n = 2n - 1$), pomocí rekurentního vztahu (alternativně pomocí diferenční rovnice) nebo pomocí vytvořující funkce.

Definice – rekurentní vztah, řešení

Rekurentním vztahem posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ označujeme rovnici

$$\Phi(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, n) = 0,$$

kde Φ označuje funkci s proměnnými $a_0, a_1, \dots, a_n, n$, která $\forall n \geq n_0$ (n_0 pevně dané) umožňuje vypočítat hodnotu a_n pomocí předchozích členů posloupnosti (tj. $a_{n-1}, \dots, a_0$) a hodnoty n. Libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ takovou, že $\forall n \geq n_0$ po do sazení hodnot $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, n$ platí $\Phi(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, n) = 0$ nazýváme řešením daného rekurentního vztahu.

Rekurentní vztahy lze rozdělit do následujících základních kategorií:

- Rekurentní vztah označujeme jako homogenní, jestliže nulová posloupnost, tj. $\{0\}_{n=0}^{\infty}$, je řešením daného vztahu. Ostatní rekurentní vztahy označujeme jako nehomogenní (někdy méně vhodně jako rekurentní vztahy s nenulovou pravou stranou).
- Rekurentní vztah označujeme jako lineární, jestliže Φ je lineární funkcí členů $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$. Ostatní rekurentní vztahy označujeme jako nelineární. Např. $a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \dots + a_{n-1} a_0$ je ukázka důležitého homogenního nelineárního rekurentního vztahu. V další části se budeme zabývat především řešením homogenních i nehomogenních lineárních rekurentních vztahů.

Poznámky – diference, diferenční rovnice

S rekurentními vztahy velmi úzce souvisí tzv. diferenční rovnice, které definují posloupnost pomocí tzv. diferencí.

- Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost. Potom symbolem Δa_n označujeme 1. diferenci posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ v bodě *n* a definujeme ji vztahem
  $$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$
  Je zřejmé, že Δa_n je definováno pro libovolné $n \in N$ a tedy 1. diference tvoří posloupnost $\{\Delta a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazývanou posloupností 1. diferencí posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.
  Analogicky lze postupovat i v případě posloupnosti $\{\Delta a_n\}_{n=0}^{\infty}$, jejímž diferencováním dostáváme posloupnost $\left\{\Delta^{(2)} a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ nazývanou posloupností 2. diferencí posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$\Delta^{(2)} a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.$$

Diference vyšších řádu definujeme rekurentně vztahem

$$\Delta^{(k)} a_n = \Delta\big(\Delta^{(k-1)} a_n\big),$$

kde $\Delta^{(0)} a_n = a_n$.

- Diferenční rovnicí rozumíme výraz

$$\Psi\big(\Delta^{(k)} a_n, \Delta^{(k-1)} a_n, \dots, \Delta a_n, n\big) = 0,$$

kde $\Delta^{(i)} a_n, i = 1, \dots, k$ označuje i-tou diferenci posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

- Každou diferenční rovnici lze převést na rekurentní vztah tak, že diference jednotlivých řádů rozepíšeme dle zřejmého vztahu $\Delta^{(k)} a_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i a_{n+k-i}$. Obráceně, každý rekurentní vztah lze převést na diferenční rovnici, neboť platí $a_{n+k} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \Delta^{(i)} a_n$.

3.1. Homogenní lineární rekurentní vztahy a jejich řešení

Definice

Homogenním lineárním rekurentním vztahem (dále HLR vztah) řádu k s konstantními koeficienty rozumíme výraz

$$C_k a_{n+k} + C_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + C_0 a_n = 0, \qquad (*)$$

kde $C_i \in R$ $(i = 0, \dots, k)$ a $C_0 C_k \neq 0$.

Řešením HLR $(*)$ rozumíme libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ takovou, že $\forall n \in N$ po dosazení hodnot $a_{n+k}, a_{n+k-1}, \dots, a_n$ platí rovnost $C_k a_{n+k} + C_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + C_0 a_n = 0$.

Základní výsledky vztahující se k problematice řešení HLR vztahů jsou uvedeny v následujícím tvrzení.

Tvrzení

- HLR vztah řádu $k \geq 1$ má nekonečně mnoho řešení. Je-li však předepsáno k počátečních podmínek (tj. k po sobě jdoucích hodnot $a_i, \dots, a_{i+k-1}$, obvykle hodnoty $a_0, \dots, a_{k-1}$), potom existuje jediné řešení, které tyto podmínky splňuje.
- Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ řešením HLR vztahu, potom pro libovolné konstanty K, L je řešením také posloupnost $\{K a_n + L b_n\}_{n=0}^{\infty}$.
- Množina všech řešení HLR vztahu řádu k tvoří vektorový prostor dimenze k. Existuje proto k lineárně nezávislých posloupností $\left\{a_n^{(1)}\right\}_{n=0}^{\infty}, \dots, \left\{a_n^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, které jsou řešením, přičemž obecným řešením rozumíme lineární kombinaci těchto k lineárně nezávislých řešení. Je-li tedy $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ libovolné řešení HLR vztahu, potom existují jediné konstanty $K_1, \dots, K_k$ takové, že $\forall n \in N \quad b_n = \sum_{i=1}^{k} K_i a_n^{(i)}$.

(Tvrzení dokažte jako cvičení.)

Jak plyne z výše uvedeného, řešení HLR vztahu spočívá v nalezení k lineárně nezávislých řešení. Pokud hledáme řešení vyhovující zadaným počátečním podmínkám, dopočteme hodnoty koeficientů $K_1, \dots, K_k$ vyskytujících se v obecném řešení (vyřešíme soustavu k lineárních algebraických rovnic o k neznámých).

Definice

Charakteristickým polynomem příslušným HLR vztahu $(*)$ rozumíme polynom

$$C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_1 x + C_0.$$

Nyní se snadno přesvědčíme, že pokud r je kořen charakteristického polynomu, potom posloupnost $\{r^n\}_{n=0}^{\infty}$ je řešením příslušného HLR vztahu. Navíc, pokud r je m násobný kořen charakteristického polynomu, potom posloupnosti $\{r^n\}_{n=0}^{\infty}, \{nr^n\}_{n=0}^{\infty}, \dots, \{n^{m-1}r^n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou lineárně nezávislá řešení příslušného HLR vztahu. Jako bezprostřední důsledek pak dostáváme následující tvrzení.

Tvrzení
Nechť $r_1, \dots, r_l$ jsou kořeny charakteristického polynomu a $m_1, \dots, m_l$ jsou jejich násobnosti, potom posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$
\begin{aligned}
a_n = \quad & r_1^n \left(K_1^{(1)} + K_2^{(1)}n + \cdots + K_{m_1}^{(1)}n^{m_1-1}\right) + \\
& r_2^n \left(K_1^{(2)} + K_2^{(2)}n + \cdots + K_{m_2}^{(2)}n^{m_2-1}\right) + \\
& \vdots \\
& r_l^n \left(K_1^{(l)} + K_2^{(l)}n + \cdots + K_{m_l}^{(l)}n^{m_l-1}\right),
\end{aligned}
$$

$K_1^{(1)}, \dots, K_{m_l}^{(l)}$ jsou libovolnéné konstanty,

je obecným řešením HLR vztahu $(*)$.

Poznámka
Vzhledem k tomu, že koeficienty uvažovaného HLR vztahu jsou reálná čísla, jsou kořeny charakteristického polynomu reálná čísla nebo dvojice komplexně sdružených čísel $r_1 = a + ib, r_2 = a - ib$. Využijeme-li goniometrický tvar komplexních čísel a známou Moivreovu větu $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) \pm i\sin(n\varphi)$, lze dvojici lineárně nezávislých posloupností generovaných komplexně sdruženými kořeny nahradit dvojicí lineárně nezávislých reálných posloupností, tj.

$$K_1(a+ib)^n + K_2(a-ib)^n = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n (C_1\cos(n\varphi) + C_2\sin(n\varphi)), \text{ kde } \varphi = \arctan\left({}^{b}/_{a}\right).$$

Příklad
Uvažujte rekurentní vztah $a_{n+4} - 3a_{n+3} + 4a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$. a) Nalezněte obecné řešení.
b) Nalezněte řešení vyhovující podmínkám $a_0 = 3, a_1 = 5 - 2\sqrt{3}, a_2 = 6 - 2\sqrt{3}, a_3 = 8$.
Řešení.
a) Jde o homogenní lineární rekurentní vztah 4. řádu, jehož charakteristický polynom má tvar

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = (x-1)^2(x^2 - x + 1).$$

Jako kořeny r_i a jejich násobnosti m_i dostáváme

$$r_1 = 1, m_1 = 2;\; r_2 = \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, m_2 = 1;\; r_3 = \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, m_3 = 1.$$

Obecné řešení má tvar

$$a_n = K_1 + K_2 n + K_3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + K_4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Nyní dvojici lineárně nezávislých komplexních posloupností $\left\{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}, \left\{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ nahradíme dvojicí reálných lineárně nezávislých posloupností tvořících také řešení. Jelikož

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \text{ a } \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$$

dostáváme

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \cos\frac{\pi n}{3} + i\sin\frac{\pi n}{3}, \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \cos\frac{\pi n}{3} - i\sin\frac{\pi n}{3}$$

a uvedenou dvojici komplexních posloupností nahradíme dvojicí posloupností $\left\{\cos\frac{\pi n}{3}\right\}_{n=0}^{\infty}, \left\{\sin\frac{\pi n}{3}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Obecné řešení má proto tvar

$$a_n = L_1 + L_2 n + L_3 \cos\frac{\pi n}{3} + L_4 \sin\frac{\pi n}{3}.$$

b) S ohledem na počáteční podmínky dostáváme následující soustavu

$$\begin{aligned} L_1 + L_3 &= 3 \\ L_1 + L_2 + {}^{L_3}/_2 + L_4\, {}^{\sqrt{3}}/_2 &= 5 - 2\sqrt{3} \\ L_1 + 2L_2 - {}^{L_3}/_2 + L_4\, {}^{\sqrt{3}}/_2 &= 6 - 2\sqrt{3} \\ L_1 + 3L_2 - L_3 &= 8 \end{aligned}$$

. Vyřešením dostáváme $a_n = 1 + 3n + 2\cos\frac{\pi n}{3} - 4\sin\frac{\pi n}{3}$.

Poznámky

- Fibonacciho posloupnost
  Posloupnost $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou lineárním homogenním rekurentním vztahem řádu 2
  $$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$
  a vyhovující počátečním podmínkám $F_0 = 0, F_1 = 1$, nazýváme Fibonacciho posloupností (její prvky nazýváme Fibonacciho čísla). Vyřešením dostáváme
  $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n \in N.$$
- Lucasova posloupnost
  Posloupnost $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou lineárním homogenním rekurentním vztahem řádu 2
  $$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$
  a vyhovující počátečním podmínkám $L_0 = 2, L_1 = 1$, nazýváme Lucasovou posloupností (její prvky nazýváme Lucasova čísla). Vyřešením dostáváme
  $$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \in N.$$

Tabulku obsahující několik prvních členů Fibonacciho a Lucasovy posloupnosti lze nalézt v příloze.

3.2. Nehomogenní lineární rekurentní vztahy a jejich řešení

Definice

Nehomogenním lineárním rekurentním vztahem (dále NHLR vztah) řádu k s konstantními koeficienty rozumíme výraz

$$C_k a_{n+k} + C_{k-1} a_{n+k-1} + \cdots + C_0 a_n = p_n, \qquad (**)$$

kde $C_i \in R\ (i = 0, \dots, k)$, $C_0 C_k \neq 0$, $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost taková, že $\exists i \in N\ p_i \neq 0$.

Řešením NHLR $(**)$ rozumíme libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ takovou, že $\forall n \in N$ po dosazení hodnot $a_{n+k}, a_{n+k-1}, \dots, a_n$ platí rovnost $C_k a_{n+k} + C_{k-1} a_{n+k-1} + \cdots + C_0 a_n = p_n$.

Výraz $C_k a_{n+k} + \cdots + C_0 a_n = 0$ označujeme jako HLR vztah příslušný NHLR vztahu $(**)$.

Základní výsledky vztahující se k problematice řešení NHLR vztahů jsou uvedeny v následujícím tvrzení.

Tvrzení

- NHLR vztah řádu $k \geq 1$ má nekonečně mnoho řešení.
- Obecné řešení $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ NHLR vztahu má tvar
  $$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)},$$
  kde $\left\{a_n^{(p)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ je tzv. partikulární řešení (jedna konkrétní posloupnost vyhovující danému NHLR vztahu),
  $\left\{a_n^{(h)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ je obecné řešení HLR vztahu příslušného NHLR vztahu.

- Je-li předepsáno k počátečních podmínek (tj. k po sobě jdoucích hodnot $a_i, \dots, a_{i+k-1}$), potom existuje jediné řešení NHLR vztahu, které těmto podmínkám vyhovuje.

Vzhledem ke znalosti metod řešení HLR vztahů je zřejmé, že řešení NHLR vztahu se redukuje na schopnost nalézt jeho partikulární řešení. V následující části se tak změříme na způsob nalezení partikulárního řešení pro speciální tvary pravých stran $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Postup nalezení partikulárního řešení NHLR vztahu se speciální pravou stranou lze popsat takto - nejprve sestavíme tzv. zkušební řešení $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$, které je ve tvaru pravé strany. Na základě tohoto zkušebního řešení sestrojíme partikulární řešení $\left\{a_n^{(p)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ následovně:

a) Je-li pravá strana NHLR vztahu ve tvaru uvedeném v sloupci p_n níže uvedené tabulky, potom zkušební řešení je ve tvaru uvedeném v příslušném řádku sloupce t_n.
b) Je-li pravá strana NHLR vztahu ve tvaru lineární kombinace členů uvedených ve sloupci p_n, potom zkušební řešení je ve tvaru lineární kombinace členů uvedených v příslušných řádcích sloupce t_n.
c) Jestliže žádný ze sčítanců zkušebního řešení není řešením příslušného HLR vztahu, potom partikulární řešení je ve tvaru zkušebního řešení, tj. $a_n^{(p)} = t_n$.
d) Jestliže některý ze sčítanců zkušebního řešení je řešením příslušného HLR vztahu, potom partikulární řešení je ve tvaru $a_n^{(p)} = n^s t_n$, kde s je nejmenší přirozené číslo takové, že již žádný ze sčítanců výrazu $n^s t_n$ (po roznásobení) není řešením příslušného HLR vztahu.

p_n	t_n
K (konstanta)	A (konstatnta)
$n^t, t \in N$	$A_0 + A_1 n + \cdots + A_t n^t$
$r^n, r \in R$	Ar^n
$r^n n^t$	$r^n(A_0 + A_1 n + \cdots + A_t n^t)$
$\cos(\alpha n)$	$A\cos(\alpha n) + B\sin(\alpha n)$
$\sin(\beta n)$	$A\cos(\beta n) + B\sin(\beta n)$
$r^n \cos(\alpha n)$	$r^n(A\cos(\alpha n) + B\sin(\alpha n))$
$r^n \sin(\beta n)$	$r^n(A\cos(\beta n) + B\sin(\beta n))$

Tabulka zkušebních řešení

Příklad

Nalezněte řešení rekurentního vztahu $a_{n+2} + 4a_n = 25n$, kde $a_0 = -1, a_1 = 5$.

Řešení.

Jde o NHLR vztah 2. řádu. Nejprve nalezneme obecné příslušného HLR vztahu $a_{n+2} + 4a_n = 0$ majícího charakteristický polynom $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$. Jeho kořeny násobnosti 1 jsou $r_1 = 2i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right), r_2 = -2i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Obecné řešení příslušného HLR vztahu je

$$a_n^{(h)} = 2^n\left(K_1\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + K_2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right).$$

Zkušební řešení má tvar pravé strany, tj. $t_n = An + B$. Jelikož žádný ze sčítanců t_n není řešením příslušného HLR vztahu dostáváme $a_n^{(p)} = 5n - 2$. Obecné řešení zadaného NHLR vztahu je

$$a_n = 5n - 2 + 2^n\left(K_1\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + K_2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right).$$

Nyní využijeme počáteční podmínky a dopočteme konstanty K_1, K_2. Dostáváme tak

$$a_n = 5n - 2 + 2^n\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right).$$

4. Vytvořující funkce

Vytvořující funkce jsou efektivním nástrojem pro práci s posloupnostmi a tedy i velmi silným nástrojem řešení celé řady netriviálních kombinatorických úloh.

Definice - obyčejná vytvořující funkce

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je reálná, resp. komplexní posloupnost. Algebraický výraz (formální mocninnou řadu)

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

resp. jakýkoliv s ním ekvivalentní tvar, nazveme (obyčejnou) vytvořující funkcí posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Poznámka

Vytvořující funkci ve tvaru mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ označujeme jako otevřený, resp. rozvinutý tvar. Ostatní „konečné" výrazy s ním ekvivalentní označujeme jako uzavřený tvar. Např. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left({}^{2x}/_{3}\right)^n$ je rozvinutý tvar vytvořující funkce posloupnosti $\left\{\left({}^{2}/_{3}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$, kdežto $f(x) = \frac{3}{3-2x}$ je její uzavřený tvar.

Tvrzení

a) Existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a její vytvořující funkcí $f(x)$. Platí

$$a_n = {}^{f^{(n)}(0)}/_{n!},$$

kde $f^{(n)}(0)$ označuje hodnotu n-té derivace funkce $f(x)$ v bodě 0.

b) Nechť $f(x)$ je vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $g(x)$ posloupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Potom následující operace s vytvořujícími funkcemi (sloupec „Vytvořující funkce" níže uvedené tabulky) definují posloupnosti uvedené ve sloupci „Posloupnost". (Dokažte jako cvičení.)

Vytvořující funkce	Posloupnost
$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=0}^{\infty}$
$x^k f(x)$	$\underbrace{0,\dots,0}_{k\times 0}, a_0, a_1, a_2, \dots$
$f(x) - \left(\sum_{i=k}^{n} a_ix^i\right)$	$a_0, \dots, a_{k-1}, \underbrace{0,\dots,0}_{(n-k+1)\times 0}, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$
$f\left(x^k\right)$	$a_0, \underbrace{0,\dots,0}_{(k-1)\times 0}, a_1, \underbrace{0,\dots,0}_{(k-1)\times 0}, a_2, \underbrace{0,\dots,0}_{(k-1)\times 0}, a_3, 0, \dots$
$\dfrac{f(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_ix^i}{x^k}$	$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$, tj. $\{a_{k+n}\}_{n=0}^{\infty}$
$\dfrac{f(x)}{1-x}$	$a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots$, tj. $\{\sum_{i=0}^{n} a_i\}_{n=0}^{\infty}$
$f'(x)$	$a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, na_n, \dots$, tj. $\{(n+1)a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$
$\int_0^x f(t)\ dt$	$0, a_0, \dfrac{a_1}{2}, \dfrac{a_2}{3}, \dots, \dfrac{a_n}{n+1}, \dots$
$f(x)g(x)$	$a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots$, tj. $\{\sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}\}_{n=0}^{\infty}$

Poznámka

Připomeňme, že $\{\sum_{i=0}^{n} a_i\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá posloupnost částečných součtů posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Posloupnost $\{\sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá konvoluce posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ a značí se $\{a_n * b_n\}_{n=0}^{\infty}$, resp. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} * \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Příklad

Označme $f(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Určete vytvořující funkci posloupnosti $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $c_n = \sum_{i=1}^{n+1} i \cdot a_i \, , n \in N$.

Řešení.

$\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ je zřejmě posloupnost částečných součtů posloupnosti $\{(n+1)a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$, která má (viz výše uvedená tabulka) vytvořující funkci $f'(x)$ a tedy ${f'(x)}/{(1-x)}$ je uzavřený tvar hledané vytvořující funkce.

Následující tabulka obsahuje přehled vybraných posloupností a jim odpovídajících uzavřených tvarů (obyčejných) vytvořujících funkcí.

Posloupnost	**Vytvořující funkce**
$\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$ (geometrická posloupnost)	$\dfrac{1}{1-qx}$
$\left\{{1}/{n!}\right\}_{n=0}^{\infty}$	e^x
$0,1,{1}/{2},{1}/{3},\dots$	$-\ln(1-x)$
$0,1,-{1}/{2},{1}/{3},-{1}/{4},{1}/{5},\dots$	$\ln(1+x)$
$\{n\}_{n=0}^{\infty}$	$\dfrac{x}{(1-x)^2}$
$\{n^2\}_{n=0}^{\infty}$	$\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$
$\{n^3\}_{n=0}^{\infty}$	$\dfrac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$
$\{C_n^k\}_{k=0}^{\infty}, n \in Z$ (binomické koeficienty)	$(1+x)^n$
$\{\bar{C}_n^k\}_{k=0}^{\infty}, n \in Z$ (kombinace s opakováním)	$(1-x)^{-n}$
$\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ (Fibonacciho čísla)	$\dfrac{x}{1-x-x^2}$
$\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ (Lucasova čísla)	$\dfrac{2-x}{1-x-x^2}$
$\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ (Catalanova čísla)	$\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$
$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = {(-1)^n}/{(2n+1)!}\, , n \in N$	$\sin x$
$a_{2n} = {(-1)^n}/{(2n)!}\, , a_{2n+1} = 0\, , n \in N$	$\cos x$

Poznámky

Vytvořující funkce lze využít při řešení úloh o rozkladech. Zdůvodněte, že platí následující:

- Rozkladům množiny nerozlišitelných objektů do k-rozlišitelných tříd, kde třída může zůstat prázdná, odpovídá vytvořující funkce

$$f(x) = (1+x+x^2+\cdots)^k = {1}/{(1-x)^k}.$$

- Rozkladům množiny nerozlišitelných objektů do k-rozlišitelných tříd, kde i-tá třída obsahuje alespoň a_i objektů, odpovídá vytvořující funkce
$$f(x) = \prod_{i=1}^{k}(x^{a_i} + x^{a_i+1} + \cdots) = x^{\sum_{i=1}^{k} a_i} \Big/ (1-x)^k \cdot$$
- Rozkladům množiny nerozlišitelných objektů do k-rozlišitelných tříd, kde i-tá třída obsahuje alespoň a_i a nejvýše b_i objektů, odpovídá vytvořující funkce
$$f(x) = \prod_{i=1}^{k}\left(x^{a_i} + x^{a_i+1} + \cdots + x^{b_i}\right) = x^{\sum_{i=1}^{k} a_i} \Big/ (1-x)^k \cdot \prod_{i=1}^{k}\left(1 - x^{b_i - a_i + 1}\right).$$
- Rozkladům přirozeného čísla n na kladné sčítance (tj. rozkladům nerozlišitelných objektů do nerozlišitelných tříd), odpovídá vytvořující funkce
$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x^i}.$$
V případě, že sčítanci se nemohou opakovat, má vytvořující funkce tvar $f(x) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 + x^i\right)$
- Rozkladům přirozeného čísla n na kladné sčítance rovné některým z čísel $a_1, \dots, a_k$, odpovídá vytvořující funkce
$$f(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-x^{a_i}}.$$
V případě, že sčítanci se nemohou opakovat, má vytvořující funkce tvar $f(x) = \prod_{i=1}^{k}(1 + x^{a_i})$.

Na závěr ještě poznamenejme, že kromě obyčejných vytvořujících funkcí existuji i další typy vytvořujících funkcí. V následující části se stručně zmíníme o exponenciálních vytvořujících funkcích (nacházejí uplatnění např. v kombinatorických úlohách, kde záleží na pořadí, tj. v úlohách vedoucích na variace, resp. permutace).

Definice - exponenciální vytvořující funkce
Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je reálná, resp. komplexní posloupnost. Algebraický výraz (formální mocninnou řadu)
$$f(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!},$$
resp. jakýkoliv s ním ekvivalentní tvar, nazveme exponenciální vytvořující funkcí posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Tvrzení
a) Existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a její exponenciální vytvořující funkcí $f(x)$. Platí totiž
$$a_n = f^{(n)}(0),$$
kde pravá strana označuje hodnotu n-té derivace funkce $f(x)$ v bodě 0.
b) Nechť $f(x)$, resp. $g(x)$ jsou exponenciální vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, resp. $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Potom exponenciální vytvořující funkce uvedené ve sloupci „Vytvořující funkce“ níže uvedené tabulky reprezentují posloupnosti uvedené ve sloupci „Posloupnost“.

Vytvořující funkce	**Posloupnost**
$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=0}^{\infty}$
$f'(x)$	$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, tj. $\{a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$
$\int_0^x f(t)\ dt$	$0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
$xf(x)$	$0, a_0, 2a_1, 3a_2, \dots, (n+1)a_n, \dots$
$x^k f(x)$	$\underbrace{0, \dots, 0}_{k\times 0}, C_{2k}^{k} a_0, C_{2k+1}^{k} a_1, C_{2k+2}^{k} a_2, \dots, C_{2k+n}^{k} a_n, \dots$

$f(x)g(x)$	$C_0^0 a_0 b_0, C_1^0 a_0 b_1 + C_1^1 a_1 b_0, C_2^0 a_0 b_2 + C_2^1 a_1 b_1 + C_2^2 a_2 b_0, \dots$, tj. $\left\{\sum_{i=0}^{n} C_n^i a_i b_{n-i}\right\}_{n=0}^{\infty}$

Příklad

Nalezněte uzavřený tvar exponenciální vytvořující funkce posloupnosti subfaktoriálů $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Řešení.

Jelikož

$$D_n = n!\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot (-1)^i \cdot (n-i)! = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot (-1)^i \cdot (n-i)!,$$

vidíme, že D_n je binomickou konvolucí posloupnosti $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ mající exponenciální vytvořující funkci e^{-x} a posloupnosti $\{n!\}_{n=0}^{\infty}$ s exponenciální vytvořující funkci $\frac{1}{1-x}$ a tedy uzavřený tvar exponenciální vytvořující funkce subfaktoriálů má tvar $f(x) = {e^{-x}}/{(1-x)}$.

Následující tabulka obsahuje přehled uzavřených tvarů exponenciálních vytvořujících funkcí několika vybraných posloupností.

Posloupnost	**Exponenciální vytvořující funkce**
$\{1\}_{n=0}^{\infty}$	e^x
$\{n\}_{n=0}^{\infty}$	xe^x
$\{A_n^k\}_{k=0}^{n}$	$(1+x)^n$
$\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$	$\dfrac{e^{-x}}{1-x}$
$\left\{ {0 \atop n} \right\}, \dots, \left\{ {n \atop n} \right\}, \left\{ {n+1 \atop n} \right\}, \dots$	$\dfrac{(e^x-1)^n}{n!}$
$\left[{0 \atop n} \right], \dots, \left[{n \atop n} \right], \left[{n+1 \atop n} \right], \dots$	$\dfrac{(-\ln(1-x))^n}{n!}$

Příklad

Uvažujte řetězce nad abecedou $\{a, b, c\}$. Určete počet řetězců: a) délky 9, které obsahují lichý počet znaků a a současně alespoň jeden znak c. b) délky 10, které neobsahují žádný znak právě jednou.

Řešení.

ad a) Vytvořující funkce má zřejmě tvar

$$f(x) = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right),$$

kde první činitel reprezentuje výskyt znaku a (lichý počet), druhý činitel reprezentuje výskyt znaku b (bez omezení) a třetí činitel reprezentuje výskyt znaku c (alespoň jeden). Využitím obecně známého rozvoje $e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{x^n}{n!}$ dostáváme

$$f(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \cdot e^x \cdot (e^x - 1) = \frac{1}{2}(e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1).$$

Nyní určíme rozvinutý tvar

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + 1\right).$$

Hledaný počet řetězců tvoří koeficient u členu $\frac{x^9}{9!}$, tj. $\frac{1}{2}(3^9 - 2^9 - 1^9) = 9\,585$.

ad b) Vytvořující funkce má zřejmě tvar

$$f(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3 = (e^x - x)^3 = e^{3x} - 3xe^{2x} + 3x^2e^x - x^3.$$

Nyní určíme rozvinutý tvar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!} - 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n!} + 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} - x^3 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n!} - 3\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} n \frac{x^n}{n!} + 3\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\frac{x^n}{n!} - x^3.$$

Hledaný počet řetězců tvoří koeficient u členu $\frac{x^{10}}{10!}$, tj. $3^{10} - 3 \cdot 2^9 \cdot 10 + 3 \cdot 10 \cdot 9 = 43\,959$.

4.1. Řešení rekurentních vztahů metodou vytvořujících funkcí

V následující části bude popsán důležitý způsob využití vytvořujících funkcí při řešení rekurentních vztahů a jejich soustav. Cílem je nalézt explicitní vyjádření n-tého členu posloupnosti tvořící řešení rekurentního vztahu jako funkce n. Postup řešení popíšeme pro NHLR vztah $(**)$, přičemž analogicky postupujeme i v ostatních případech.

Označme $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost, která je řešením zadaného NHLR vztahu $(**)$ a $f(x)$ její vytvořující funkci.

1. Vynásobme obě strany rekurentního vztahu nejvyšší mocninou x^{n+k}. Dostáváme rovnici, která je platná pro každé $n \in N$, tj. dostáváme „nekonečně“ mnoho rovnic.
2. Nyní uvedené rovnice sčítáme přes $n = 0,1,\ldots$, čímž na levé straně získáme výrazy tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+i}x^{n+i}$, které vyjádříme pomocí symbolu pro vytvořující funkci, tj. $f(x)$. Dostáváme tak rovnici, jejíž neznámou je právě vytvořující funkce $f(x)$ hledané posloupnosti.
3. Vyřešíme výše zmíněnou rovnici, čímž získáme uzavřený tvar vytvořující funkce $f(x)$.
4. Nalezneme rozvinutý tvar $f(x)$, přičemž koeficient u x^n je hledané explicitní vyjádření a_n.

Příklad

Vyřešte rekurentní vztah $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$, kde $a_0 = a_1 = 1$.

Řešení.

Jde o nehomogenní lineární rekurentní vztah 2. řádu, který nejprve převedeme do tvaru

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = (-1)^n$$

a obě strany vynásobíme x^{n+2} a následně sčítáme přes $n = 0,1,\ldots$. Dostáváme tak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} - 2x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n.$$

Označíme-li vytvořující funkci hledané posloupnosti $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a nahradíme-li nekonečné součty, dostaneme rovnici

$$(f(x) - a_0 - a_1x) - x(f(x) - a_0) - 2x^2 f(x) = \frac{x^2}{1+x}, \text{ tj. } f(x) - xf(x) - 2x^2 f(x) = \frac{x^2+x+1}{1+x}.$$

Jako řešení dostáváme uzavřený tvar vytvořující funkce hledané posloupnosti

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{(1+x)^2(1-2x)}.$$

Využitím rozkladu na parciální zlomky získáme tvar

$$f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{1+x} + \frac{7}{9}\frac{1}{1-2x},$$

ze kterého snadno dostaneme rozvinutý tvar

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{7}{9}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n,$$

tj.

$$a_n = \frac{1}{9}[(-1)^n(2+3n) + 7 \cdot 2^n].$$

Poznámka

Důležitým příkladem nelineárního rekurentního vztahu je rekurentní vztah, který definuje nám již známou Catalanovu posloupnost $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$. Při jeho odvození vyjdeme z interpretace, že C_n je rovno počtu způsobů jak správně uzávorkovat výraz $x_0 \cdot \ldots \cdot x_n$. Všechny způsoby uzávorkování rozdělíme do tříd podle toho, který součin je realizován (tedy uzávorkován) jako poslední (označíme ho symbolem $*$). Dostáváme tak $(n-1)$ tříd, které odpovídají následujících schématům uzávorkování:

1. třída: $\big((x_0) * (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)\big)$ ... celkem $C_0 C_{n-1}$ způsobů uzávorkování,

2. třída: $\big((x_0 \cdot x_1) * (x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)\big)$ ... celkem $C_1 C_{n-2}$ způsobů uzávorkování,

⋮

$(n-1)$. třída: $\big((x_0 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}) * (x_n)\big)$ ... celkem $C_{n-1} C_0$ způsobů uzávorkování,

tedy

$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0$, resp. $C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \cdots + C_n C_0$, kde $C_0 = 1$.

K vyřešení uvedeného rekurentního vztahu použijeme metodu vytvořujících a označíme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$. Dostáváme tak

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \cdots + C_n C_0) x^n,$$

tedy (výraz v závorce na pravé straně rovnosti je n-tý člen konvoluce posloupnosti $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ sama se sebou)

$$f(x) - C_0 = x f^2(x)$$

a jako řešení dostáváme dvě funkce (jde o kvadratickou rovnici)

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x},$$

z nichž je samozřejmě pouze jedna vytvořující funkcí Catalanovy posloupnosti. Vzhledem k tomu, že musí platit $\lim_{x \to 0} f(x) = C_0 = 1$ dostáváme uzavřený tvar

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Z uvedeného uzavřeného tvaru $f(x)$ je zřejmé, že C_n je až na multiplikativní konstantu $\left(-1/2\right)$ rovno koeficientu u x^{n+1} v rozvoji $\sqrt{1-4x}$ a je zřejmě roven (viz Newtonův vzorec)

$$C_n = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \ldots \left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!} (-4)^{n+1},$$

což po snadné úpravě dává nám již známý tvar $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$.

Poznámka

Metodu vytvořujících funkcí lze využít i k řešení soustav rekurentních vztahů, přičemž postup je zcela analogický případu řešení jednoho rekurentního vztahu. Zjednodušeně řečeno, každý rekurentní vztah soustavy vynásobíme výrazem x^{n+k} s vhodným k a následně sčítáme přes $n = 0, 1, \ldots$. Nekonečné součty obsahující členy hledaných posloupností vyjádříme pomocí symbolů jejich vytvořujících funkcí, čímž dostaneme soustavu rovnic, kde neznámé jsou právě vytvořující funkce hledaných posloupností. Vyřešením soustavy dostaneme uzavřené tvary vytvořujících funkcí. Na závěr pak nalezneme jejich rozvinutý tvar.

Příklad

Nalezněte řešení soustavy rekurentních vztahů $a_{n+1} = 2a_n + b_n$, $b_{n+1} = 3a_n$, kde $a_0 = 1, b_0 = 2a_0$.

Řešení.

Jde o soustavu dvou lineárních homogenních rekurentních vztahů 1. řádu.

Vynásobením obou vztahů soustavy výrazem x^{n+1} a součtováním dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0 \text{ a } -3x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{n+1} = 0.$$

Označme-li $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, dostáváme

$$(f(x) - a_0) - 2xf(x) - xg(x) = 0 \text{ a } -3xf(x) + (g(x) - b_0) = 0$$

Po úpravě získáme lineární nehomogenní soustavu dvou rovnic o neznámých $f(x), g(x)$ a s maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-2x & -x & 1 \\ -3x & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Soustavu vyřešíme např. Cramerovým pravidlem, dále využijeme rozklad na parciální zlomky. Dostáváme tak

$$f(x) = \frac{1+2x}{(1+x)(1-3x)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1+x} + \frac{5}{4}\frac{1}{1-3x}, g(x) = \frac{2-x}{(1+x)(1-3x)} = \frac{3}{4}\frac{1}{1+x} + \frac{5}{4}\frac{1}{1-3x}.$$

Jako řešení pak dostáváme

$$a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)(-1)^n + \frac{5}{4}3^n, b_n = \frac{3}{4}(-1)^n + \frac{5}{4}3^n.$$

4.2. Věžové polynomy

Důležitým typem úloh (pro pochopení některých kombinatorických principů, ale i z hlediska aplikačního) jsou úlohy na šachovnici. Jedna třída těchto úloh souvisí s problematikou rozmísťování figur na šachovnici tak, že se vzájemně (ne)ohrožují, další pak souvisí s pohybem figur po šachovnici. V následující části se stručně zaměříme na úlohy související s rozmísťováním věží na šachovnici.

Definice - šachovnice

Šachovnicí typu (m, n), kde $m, n \in N^+$, rozumíme obdélníkové schéma skládající se z $m \cdot n$ čtvercových polí uspořádaných do m řádků a n sloupců. Na šachovnici mohou existovat tzv. zakázaná pole (ostatní pole označujeme jako povolená nebo také přípustná). Šachovnici budeme značit symbolem C, resp. $C_1, C_2, \bar{C}$ apod.

Základní úlohu lze nyní formulovat následovně – určete, kolika různými způsoby lze na přípustná pole dané šachovnice C rozmístit k nerozlišitelných věží tak, že se vzájemně neohrožují[2] (tj. žádné dvě věže nestojí ve stejném řádku ani sloupci a současně nestojí na zakázaných polích).

Definice - věžový polynom (rook polynomial)

Nechť C je šachovnice typu (m, n). Věžovým polynomem šachovnice C rozumíme polynom

$$r(x; C) = r_0(C) + r_1(C)x + r_2(C)x^2 + \cdots + r_l(C)x^l,$$

kde $l = min\{m, n\}$ a

$r_k(C)$ je počet, kolika způsoby lze na přípustná pole šachovnice C rozmístit k nerozlišitelných věží tak, že se neohrožují.

Poznámky

- Uvědomme si, že věžový polynom je obyčejná vytvořující funkce posloupnosti koeficientů $\{r_i(C)\}_{i=0}^{min\{m,n\}}$ a lze tak využívat poznatky z kapitoly o vytvořujících funkcích.
- Snadno nahlédneme, že z požadavku „věže se nesmí ohrožovat" vyplývá, že na šachovnici typu (m, n) nelze umístit více věží než je $min\{m, n\}$, a to bez ohledu na případnou existenci zakázaných polí. Odtud $r_i(C) = 0$ pro $i > min\{m, n\}$.
- Pro libovolnou šachovnici zřejmě platí $r_0(C) = 1$ a $r_1(C) =$ počet přípustných polí. Při výpočtu ostaních koeficientů $r_k(C)$ využíváme následující pravidla.
- Zřejmou (a mnohdy využívanou) vlastností věžových polynomů je, že jsou invariantní vzhledem k permutacím řádků, resp. sloupců šachovnice.

[2] Nejde o hru v šachy, ve které se věže stejné barvy (tj. nerozlišitelné) neohrožují.

Pravidlo 1

Nechť C je šachovnice, která se skládá z podšachovnic C_1, C_2, které jsou řádkově i sloupcově disjunktní, tj. žádné povolené pole podšachovnice C_1 neleží ve stejném řádku ani sloupci jako povolené pole podšachovnice C_2. Potom pro koeficienty $r_k(C)$ platí

$$r_k(C) = \sum_{i=0}^{k} r_i(C_1) r_{k-i}(C_2),$$

resp. pro věžový polynom $r(x;C)$ platí

$$r(x;C) = r(x;C_1) r(x;C_2).$$

Důkaz.

Vzhledem k tomu, že C_1, C_2, jsou řádkově i sloupcově disjunktní je zřejmé, že žádná věž umístěná na C_1 se neohrožuje s žádnou věží umístěnou na C_2. Odtud dostáváme vztah pro koeficient $r_k(C)$. Nyní si stačí uvědomit, že $r_k(C)$ je konvolucí koeficientů příslušných podšachovnicím C_1, C_2 a tedy $r(x;C)$ je součinem věžových polynomu podšachovnic.

Poznámka

Pravidlo 1 lze zobecnit na případ více podšachovnic: jsou-li $C_1, \dots, C_h$ po dvou disjunktní (tj. každá dvojice různých podšachovnic je disjunktní ve smyslu výše uvedeného pravidla) podšachovnice šachovnice C, potom

$$r(x;C) = \prod_{i=1}^{h} r(x;C_i).$$

Vzhledem k tomu, že předpokladem výše uvedeného pravidla je disjunktnost podšachovnic (po dvou), je třeba si umět poradit i v případě, že předpoklad splněn není. V této situaci využijeme tzv. faktorizaci popsanou v následujícím pravidle 2.

Pravidlo 2

Nechť C je šachovnice, p libovolné její přípustné pole, C_1 je podšachovnice vzniklá z C vynecháním pole p a C_2 je podšachovnice vzniklá z C vynecháním řádku a sloupce, v jejichž průsečíku leží pole p. Potom pro koeficienty $r_k(C)$ platí

$$r_k(C) = r_k(C_1) + r_{k-1}(C_2),$$

resp. pro věžový polynom $r(x;C)$ platí

$$r(x;C) = r(x;C_1) + x \cdot r(x;C_2).$$

Důkaz.

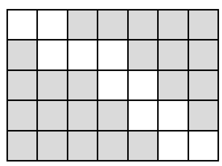
Je-li p zvolené přípustné pole, máme pouze dvě možností - buď na p věž neumístíme (tj. pole vynecháme), nebo umístíme (tj. vynecháme příslušný řádek a sloupec). Odtud platnost prvního dokazovaného vztahu pro $r_k(C)$. Nyní stačí na již dokázaný rekurentní vztah aplikovat metodu vytvořujících funkcí, tj. obě strany vynásobit x^k a sčítat přes $k = 0, \dots, min\{m,n\}$. Odtud dostáváme platnost druhého vztahu týkajícího se věžových polynomů.

Poznámka

Jako pole p zmíněné v pravidle 2 lze zvolit libovolné přípustné pole, nicméně některá pole mohou být vhodnější než jiná (např. pokud odstraněním zvoleného pole vzniknou disjunktní podšachovnice).

Příklad

Sestavte věžový polynom pro zobrazenou šachovnici (zakázaná políčka jsou šedá).

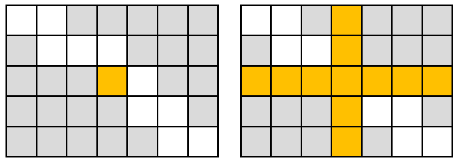


Řešení.

Aplikujeme pravidlo 2 a za pole p zvolíme průnik 3. řádku a 4. sloupce (toto pole rozdělí šachovnici na dvě disjunktní podšachovnice).

Dostáváme tak

$$r(x;C) = r(x;C_1) + x \cdot r(x;C_2),$$



kde podšachovnice C_1, C_2 jsou znázorněny na vedlejším obrázku (vynechané pole u C_1 i sloupce/řádky u C_2 jsou zbarvená okrově).

Podšachovnice C_1 se skládá ze dvou disjunktních podšachovnic malého rozměru, pro které snadno sestavíme příslušný věžový polynom (jinak bychom na C_1 opět aplikovali výše uvedená pravidla)

$$r(x;C_1) = (1 + 5x + 5x^2)(1 + 5x + 6x^2 + x^3) = 1 + 10x + 36x^2 + 56x^3 + 35x^4 + 5x^5.$$

Podšachovnice C_2 se skládá také ze dvou disjunktních podšachovnic malého rozměru a tedy snadno sestavíme příslušný věžový polynom (jinak bychom na C_2 opět aplikovali výše uvedená pravidla)

$$r(x;C_2) = (1 + 4x + 3x^2)^2 = 1 + 8x + 22x^2 + 24x^3 + 9x^4.$$

Jako věžový polynom původní šachovnice tak dostáváme

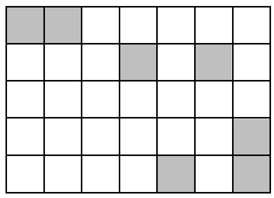
$$r(x;C) = (1 + 10x + 36x^2 + 56x^3 + 35x^4 + 5x^5) + x(1 + 8x + 22x^2 + 24x^3 + 9x^4),$$

tj.

$$r(x;C) = 1 + 11x + 44x^2 + 78x^3 + 59x^4 + 14x^5.$$

Poznámka

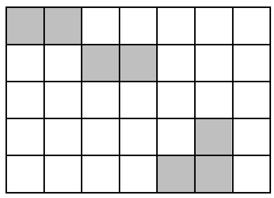
V některých situacích nás zajímá hodnota pouze jednoho koeficientů $r_k(C)$ a je proto zbytečné počítat věžový polynom. V tomto případě se kromě uvedených pravidel 1 a 2 užívá (zejména v situaci, kdy zakázaných polí je málo, resp. mají jednoduchou strukturu) i princip inkluze a exkluze.



Příklad

Určete, kolika různými způsoby lze na danou šachovnici rozmístit maximální možný počet věží tak, že se neohrožují a nestojí na zakázaných (šedých) polích.

Řešení.



Na přípustná pole dané šachovnice lze zřejmě rozmístit maximálně 5 neohrožujících se věží, tedy hledáme $r_5(C)$. Pro větší přehlednost provedeme transpozici 3. a 6. sloupce 6. a 7. sloupce (věžový polynom je invariantní na permutace sloupců/řádků). Tím dostáváme šachovnici, ze které je patrné, že zakázaných polí je málo a navíc mají jednoduchou strukturu. Z tohoto důvodu je efektivnější využít princip inkluze a exkluze a vyjádřit počet rozmístění na přípustná pole pomocí rozmísťování věží na zakázaná pole.

Označíme-li $\bar{C}$ šachovnici zakázaných polí, vidíme, že se skládá ze tří po dvou disjunktních podšachovnic $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$, tedy

$$r(x;\bar{C}) = r(x;\bar{C}_1) r\big(x;\overline{C_2}\big) r\big(x;\overline{C_3}\big) = (1 + 2x)^2(1 + 3x + x^2) = 1 + 7x + 17x^2 + 16x^3 + 4x^4.$$

Připomeňme, že koeficient u x^k polynomu $r(x;\bar{C})$ je počet, kolika způsoby lze na zakázaná pole zadané šachovnice rozmístit k věží tak, že se neohrožují. Nyní použijeme princip inkluze a exkluze. Dostáváme

$$r_5(C) = N - \sum_{i=1}^{5} N(\alpha_i) + \sum_{1 \le i1 < i2 \le 5} N(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}) - \sum_{1 \le i1 < i2 < i3 \le 5} N(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}) +$$
$$+ \sum_{1 \le i1 < i2 < i3 < i4 \le 5} N(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \alpha_{i4}) - \sum_{1 \le i1 < i2 < i3 < i4 < i5 \le 5} N(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \alpha_{i4}, \alpha_{i5}),$$

kde $N = r_0(\bar{C}) \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ ... počet všech rozmístění 5 neohrožujících se věží (bez omezení zakázanými poli);

$\sum_{i=1}^{5} N(\alpha_i) = r_1(\bar{C}) \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ ... počet rozmístění 5 neohrožujících se věží tak, že 1 stojí na zakázaném poli, zbylé 4 bez omezení;

$\sum_{1 \le i1 < i2 \le 5} N(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}) = r_2(\bar{C}) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1020$ ... počet rozmístění 5 neohrožujících se věží tak, že 2 stojí na zakázaných polích, zbylé 3 bez omezení;

$\sum_{1\leq i1<i2<i3\leq 5} N(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}) = r_3(\bar{C}) \cdot 4 \cdot 3 = 192$ ... počet rozmístění 5 neohrožujících se věží tak, že 3 stojí na zakázaných polích, zbylé 2 bez omezení;

$\sum_{1\leq i1<i2<i3<i4\leq 5} N(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \alpha_{i4}) = r_4(\bar{C}) \cdot 3 = 12$ ... počet rozmístění 5 neohrožujících se věží tak, že 4 stojí na zakázaných polích, zbývající 1 bez omezení;

$\sum_{1\leq i1<i2<i3<i4<i5\leq 5} N(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \alpha_{i4}, \alpha_{i5}) = r_5(\bar{C}) \cdot 1 = 0$ ... počet rozmístění 5 neohrožujících se věží tak, že všechny stojí na zakázaných polích, zbývajících 0 bez omezení;

tj.

$$r_5(C) = 2520 - 2520 + 1020 - 192 + 12 - 0 = 840.$$

5. Burnside/Pólyaova enumerační metoda

Burnside/Pólyaova enumerační metoda je nástroj, který umožňuje určit počet různých „konfigurací“ objektů, u kterých je třeba brát v úvahu jejich symetrie (rovinné, prostorové, ...). Nachází uplatnění např. při určení počtu izomérů chemických sloučenin, při určení počtu obarvení různých objektů apod.
Před studiem této kapitoly si ještě připomené základní pojmy a fakta o grupách, zejména o symetrických grupách.

5.1. Permutace, symetrická grupa

Definice (permutace)
Nechť A je n-prvková množina, tj. $|A| = n$. Potom permutací na množině A rozumíme libovolné vzájemně jednoznačné zobrazení A na A.

Poznámky

- Permutací na množině A lze interpretovat jako uspořádání prvků množiny A, přesněji jako libovolnou uspořádanou n-tici tvořenou právě všemi prvky množiny A.
- Permutace budeme značit symboly $\pi, \rho, \sigma, \ldots$ a pro jejich zápis budeme využívat nejprve tzv. dvouřádkový zápis, později zápis ve tvaru součinu (obvykle disjunktních) cyklů.
  Dvouřádkový zápis permutace na množině $A = \{1,2, \ldots , n\}$ má tvar
  $$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix},$$
  kde horní řádek obsahuje vzory a dolní řádek obsahuje jim odpovídající obrazy. Je zřejmě, že při zápisu permutace není podstatné pořadí sloupců, podstatné je pouze přiřazení obrazů vzorům. Z tohoto pohledu např. zápisy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ definují stejnou permutaci.

Označíme-li S_n množinu všech permutací na n-prvkové množině, lze na S_n definovat operaci násobení permutací $\pi, \rho \in S_n$ jako skládání zobrazení, tj. následovně:
$$\pi\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \rho\big(\pi(1)\big) & \rho\big(\pi(2)\big) & \cdots & \rho\big(\pi(n)\big) \end{pmatrix}.$$
Je-li např. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, dostáváme $\pi\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \rho\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Nyní snadno ověříme (permutace je vzájemně jednoznačné zobrazení), že $(S_n, \cdot)$ je grupa, tj. platí:

i) $\forall \pi, \rho, \tau \in S_n \quad (\pi \cdot \rho) \cdot \tau = \pi \cdot (\rho \cdot \tau)$, (asociativita)

ii) $\exists id \in S_n\ \forall \pi \in S_n \quad id \cdot \pi = \pi \cdot id = \pi$, (existence jednotkového prvku)

iii) $\forall \pi \in S_n\ \exists \pi^{-1} \in S_n \quad \pi \cdot \pi^{-1} = \pi^{-1} \cdot \pi = id$. (existence inverzního prvku)

Konkrétně $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ a je-li $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$, potom $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

Např. pro $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ dostáváme $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Definice (symetrická/permutační grupa)
Grupu $(S_n, \cdot)$ nazýváme symetrickou grupou na n-prvkové množině. Každou podgrupu grupy $(S_n, \cdot)$ nazýváme permutační grupou.

Poznámka

Symetrická grupa $(S_n, \cdot)$ je řádu $n!$ a pro $n \geq 3$ není komutativní.

Definice - cyklus

Řekneme, že permutace $\pi \in (S_n, \cdot)$ je cyklus délky k, jestliže:

i) $\exists\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ taková, že $\forall j \in \{1, \dots, k-1\}$ $\left[\pi(i_j) = i_{j+1}\right] \wedge [\pi(i_k) = i_1]$,

ii) $\forall i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ $\pi(i) = i$.

V tomto případě píšeme $\pi = (i_1, \dots, i_k)$. Speciálně, cyklus délky 2 se nazývá transpozice.

Např. permutace $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 2 & 4 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ je cyklus délky 6 a zapisujeme ho $\pi = (1,5,4,2,7,8)$, resp. obšírněji $\pi = (1,5,4,2,7,8)(3)(6)$.

Poznámky

- Je dobré si uvědomit, že z definice cyklu vyplývá, že jeho zápis není jednoznačný. Lze ho totiž interpretovat jako umístění prvků uspořádané k-tice $(i_1, \dots, i_k)$ na kružnici. Zjednodušeně řečeno, nezáleží na tom, kde cyklus začíná, ale na tom, jaký prvek následuje za daným prvkem při pohybu (např. ve směru hodinových ručiček) po kružnici. Z tohoto pohledu např. platí $(1,5,4,2,7,8) = (8,1,5,4,2,7) = (7,8,1,5,4,2) = (2,7,8,1,5,4) = (4,2,7,8,1,5) = (5,4,2,7,8,1)$.
- Cyklus je speciální permutace a proto lze cykly násobit.
  Např. $(1,5,3,2)(4,3) = (1,5,4,3,2)$, kdežto $(4,3)(1,5,3,2) = (1,5,3,4,2)$.
- Řekneme, že cykly $\pi, \rho \in S_n$, kde $\pi = (i_1, \dots, i_k), \rho = (j_1, \dots, j_l)$ jsou disjunktní, jestliže $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \emptyset$.
  S výhodou se využívá zřejmá skutečnost, že <u>součin disjunktních cyklů je komutativní</u>!

Tvrzení

i) Každou permutaci lze zapsat, až na pořadí jednoznačně, ve tvaru součinu disjunktních cyklů.

ii) Každý cyklus lze zapsat ve tvaru součinu transpozic s tím, že toto vyjádření není jednoznačné, ale platí, že každou permutaci lze zapsat vždy jako součin pouze sudého, nebo pouze lichého počtu transpozic.

Poznámky

- Identická permutace $id \in S_n$ má jako součin disjunktních cyklů zápis $id = (1)(2)\dots(n)$.
- Je-li $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k)$ cyklus, potom π^{-1} je také cyklus a má tvar $\pi^{-1} = (i_k, i_{k-1}, \dots, i_2, i_1)$. Např. $(1,5,4,3,2)^{-1} = (2,3,4,5,1)$. Navíc, každá transpozice je zřejmě inverzní sama k sobě, tedy $(i_1, i_2)^{-1} = (i_1, i_2)$.
- Cyklus $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ lze zapsat ve tvaru součinu transpozic následovně
  $$(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) = (i_1, i_2)(i_1, i_3) \cdot \ldots \cdot (i_1, i_k).$$
- Je-li π permutace zapsaná ve tvaru disjunktních cyklů, potom inverzní permutace π^{-1} má tvar součinu inverzních cyklů tvořících permutaci π (vzhledem k jejich disjunktnosti nezáleží na jejich pořadí).
  Např. pro $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 4 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} = (198)(2573)(46)$ dostáváme $\pi^{-1} = (891)(3752)(46)$.

Definice – sudá, lichá permutace

Permutaci nazveme sudou, jestliže ji lze zapsat ve tvaru součinu sudého počtu transpozic. Ostatní permutace nazýváme liché.

Poznámky

- Snadno se přesvědčíme, že součin sudých permutací je opět sudá permutace, inverzní permutace k sudé je také sudá a identita je sudá (0 transpozic). Označíme-li tedy A_n množinu všech sudých permutací na n-prvkové množině, je zřejmé, že A_n je uzavřená vzhledem k násobení permutací a tedy $(A_n, \cdot\,) \sqsubseteq (S_n, \cdot\,)$. Grupa $(A_n, \cdot\,)$ se nazývá alternující grupa, je řádu $n!/_2$ (polovina permutací je sudých a polovina lichých) a pro $n \geq 4$ je nekomutativní.
- Důležité příklady permutačních grup jsou tzv. dihedrální grupy $D_n, n \geq 2$, které popisují prostorové symetrie pravidelných n-úhelníků (jejich vrcholy pro tyto účely očíslujeme $1, \dots, n$). Dihedrální grupa D_n je řádu $2n$ (obsahuje n otočení a n osových symetrií).
- Symetrie obdélníka (vrcholy číslujeme 1, 2, 3, 4) tvoří tzv. Kleinovu čtyřgrupu (Felix Klein, 1849-1925). Obsahuje následující permutace:
  - $(13)(24)$ … otočení o 180°,
  - $(1)(2)(3)(4)$ … otočení o 360°,
  - $(12)(34)$ … překlopení kolem osy procházející středy stran 12 a 34,
  - $(14)(23)$ … překlopení kolem osy procházející středy stran 14 a 23.

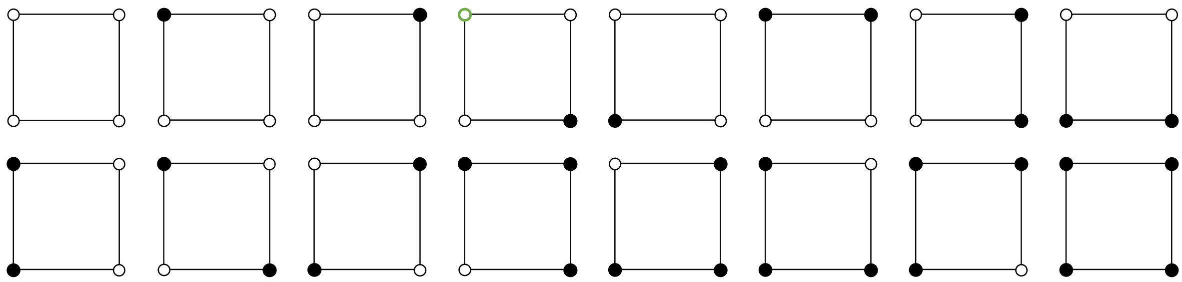
Příklad

Určete, kolika různými způsoby lze obarvit vrcholy čtverce pomocí nejvýše 2 zadaných barev.

Řešení.

Nejprve je nutné vymezit formulaci „obarvit pomocí nejvýše 2 barev“.

Pod obarvením pomocí nejvýše 2 barev rozumíme, že kterýkoliv vrchol čtverce bude obarven právě jednou ze dvou zadaných barev a to bez ohledu na obarvení ostatních vrcholů. Připouštíme tak i situaci, kdy všechny vrcholy budou obarveny stejnou barvou. Všechny možnosti obarvení vrcholů čtverce pomocí nejvýše 2 barev (bílá, černá), jsou zobrazeny níže.



Nyní je třeba vyjasnit formulaci „různé způsoby obarvení“. Uvažujeme-li čtverec umístěný v rovině, potom je zřejmé, že např. 2., 3., 4. a 5. čtverec 1. řádku se liší pouhým otočením (o 90°, 180°, 270°, resp. 360°) a je proto rozumné je považovat za stejně obarvené. Analogicky 6., 7. 8. čtverec 1. řádku a 1. čtverec 2. řádku, dále 2. a 3. čtverec 2. řádku, resp. 4., 5. 6. a 7. čtverec 2. řádku se liší pouhým otočením. Celkem tak dostáváme 6 různých obarvení vrcholů čtverce nejvýše 2 barvami.

Uvědomme si, že při vymezení pojmu různá obarvení čtverce hrají důležitou roli jeho symetrie, tj. takové transformace čtverce, které ho „nemění“ (např. otočení o 90°).

Příklad

Určete: a) 2D symetrie čtverce, b) 3D symetrie čtverce.

Řešení.

Vrcholy čtverce postupně očíslujeme 1, 2, 3, 4.

ad a) 2D symetrie čtverce odpovídají postupnému otáčení o 90° a lze je proto popsat následujícími permutacemi: (1234) ... otočení o 90° $(13)(24)$ ... otočení o 180°

(1432) ... otočení o 270° $(1)(2)(3)(4)$ ... otočení o 360°

Odtud $P_{2D} = \{(1)(2)(3)(4), (1234), (13)(24), (1432)\}$.

ad b) 3D symetriím čtverce (tvoří tzv.dihedrální grupa D_4) odpovídají, kromě jeho 2D symetrií, ještě 4 osové symetrie, které lze popsat následujícími permutacemi:

$(12)(34)$ ... překlopení kolem osy procházející středy stran 1-2 a 3-4,
$(14)(23)$ ... překlopení kolem osy procházející středy stran 1-4 a 2-3,
$(1)(24)(3)$ ... překlopení kolem osy procházející vrcholy 1 a 3,
$(13)(2)(4)$ ... překlopení kolem osy procházející vrcholy 2 a 4.

Odtud

$$P_{3D} = \{(1)(2)(3)(4), (1234), (13)(24), (1432), (12)(34), (14)(23), (1)(24)(3), (13)(2)(4)\}.$$

Řádně zdůvodněte, že množiny G_{2D}, G_{3D} tvoří permutační grupy (podgrupy $(S_4, \cdot)$), navíc $G_{2D} \sqsubseteq G_{3D}$.

Nyní výše prezentovaný přístup zobecníme a formalizujeme.

Definice (cycle-structure, cycle-index polynom)

Nechť $G = (N, P)$[3] je permutační grupa na množině $N = \{1, \dots, n\}$.

a) Je-li $\pi \in G$, potom symbolem cyc_str(π) označujeme formální výraz (tzv. „cycle-structure") popisující strukturu disjunktních cyklů permutace π (tj. délku a jejich počet). Definujeme ho vztahem

$$\text{cyc\_str}(\pi) = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

kde x_i reprezentuje cyklus délky i a
α_i je počet cyklů délky i.

b) Symbolem $P_G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ označujeme tzv. cycle-index polynom permutační grupy G a definujeme ho vztahem

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in P} \text{cyc\_str}(\pi),$$

kde $|G|$ označuje řád (počet prvků) permutační grupy.

(vzhledem k tomu, že dosud není ustálena vhodná česká terminologie, budeme používat „anglickou terminologii", tj. cycle-structure a cycle-index polynom)

Příklad

Určete cycle-index polynom a) 2D symetrií čtverce, b) 3D symetrií čtverce.

Řešení.

Vzhledem k výše uvedenému příkladu hned dostáváme:

a) $\text{cyc\_str}\big((1)(2)(3)(4)\big) = x_1^4$, $\text{cyc\_str}\big((13)(24)\big) = x_2^2$, $\text{cyc\_str}(1234) = \text{cyc\_str}(1432) = x_4$, tedy

$$P_{2D}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^2 + 2x_4).$$

b) $\text{cyc\_str}\big((12)(34)\big) = \text{cyc\_str}\big((14)(23)\big) = x_2^2$,$\text{cyc\_str}\big((1)(24)(3)\big) = \text{cyc\_str}(13)(2)(4) = x_1^2 x_2$, tedy

$$P_{3D}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{8}(x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + 3x_2^2 + 2x_4).$$

Tvrzení

Nechť $N = \{1, \dots, n\}$ je množina reprezentující n-prvkový objekt, jehož symetrie jsou definovány permutační grupou $G = (N, P)$. Potom počet různých obarvení daného n-prvkového objektu pomocí nejvýše m barev, je rovno hodnotě cycle-index polynomu $P_G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ permutační grupy G pro $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = m$, tj.

$$P_G(m, \dots, m).$$

[3] P je množina permutací na N, která obsahuje identickou permutaci, je uzavřená na inverzi a násobení permutací.

Poznámky

- Dvě obarvení považujeme za stejná, pokud existuje symetrie, která převádí jedno obarvení na druhé. Exaktněji: Nechť $G = (N, P)$ je permutační grupa symetrií n-prvkového objektu $N = \{1,2, \dots, n\}$. Dvě obarvení $\left(b_1^{(1)}, \dots, b_n^{(1)}\right)$ a $\left(b_1^{(2)}, \dots, b_n^{(2)}\right)$ považujeme za stejná, jestliže
$$\exists \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} \in P \text{ tak, že } \forall i \in \{1,2, \dots, n\} \text{ platí } b_i^{(1)} = b_{\pi(i)}^{(2)}$$
(tj. v prvním způsobu obarvení je prvek i obarven stejně jako prvek $\pi(i)$ v druhém způsobu obarvení)
- Zdůrazněme ještě, že pod obarvením pomocí nejvýše m barev rozumíme takové obarvení, kdy libovolný prvek objektu je obarven kteroukoliv z uvedených m barev a to bez ohledu na obarvení ostatních prvků objektu.

Příklad

Počet 2D obarvení vrcholů čtverce pomocí nejvýše m barev je rovno $P_{2D}(m) = \frac{1}{4}(m^4 + m^2 + 2m)$, kdežto ve 3D je rovno $P_{3D}(m) = \frac{1}{8}(m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m)$. Speciálně dostáváme

m	2	3	4	5	10	50	100
$P_{2D}(m)$	6	24	70	165	2 530	1 563 150	25 002 550
$P_{3D}(m)$	6	21	55	120	1 540	813 450	12 753 775

Předešlé tvrzení odpovídá na otázku počtu obarvení daného objektu pomocí nejvýše m barev. Dalším logickým krokem je proto vyřešení otázky počtu obarvení daného objektu pomocí předepsaného počtu použití jednotlivých barev. Např. z výše uvedeného příkladu víme, že vrcholy čtverce lze pomocí nejvýše 3 barev (např. b, č, m) obarvit 24 způsoby, pokud uvažujeme 2D symetrie čtverce. Lze si v této souvislosti klást otázku, v kolika případech jde o obarvení, kdy použiju právě $1 \times b, 0 \times \text{č}, 3 \times m$.

Tvrzení

Nechť $N = \{1, \dots, n\}$ je množina reprezentující n-prvkový objekt, jehož symetrie jsou definovány permutační grupou $G = (N, P)$. Potom počet různých obarvení daného n-prvkového objektu pomocí m zadaných barev $\{b_1, \dots, b_m\}$, kde barva b_i $(i = 1, \dots, m)$ je použita na obarvení k_i prvků $(k_1 + \dots + k_m = n)$, je rovno koeficientu u členu $b_1^{k_1} \cdot \dots \cdot b_m^{k_m}$ v rozvoji cykle-index polynomu $P_G(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde za x_i $(i = 1, \dots, n)$ dosadíme výraz $b_1^i + \dots + b_m^i$.

Příklad

Uvažujte 2D symetrie čtverce a určete rozložení počtu různých obarvení jeho vrcholů pomocí nejvýše 3 barev např. b, č, m.

Řešení.

Stačí určit rozvoj cycle-index polynomu $P_{2D}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^2 + 2x_4)$, do kterého za x_i dosadíme $b^i + \text{č}^i + m^i$. Po dosazení a dalších úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} &P_{2D}(b + \text{č} + m, b^2 + \text{č}^2 + m^2, b^3 + \text{č}^3 + m^3, b^4 + \text{č}^4 + m^4) = \\ &\quad = b^4 + c^4 + m^4 + \\ &\qquad + b^3c + b^3m + c^3b + c^3m + m^3b + m^3c + \\ &\qquad\quad + 2b^2c^2 + 2b^2m^2 + 2c^2m^2 + 3b^2cm + 3c^2bm + 3m^2bc. \end{aligned}$$

Z uvedeného rozvoje např. vidíme, že existují 2 různá obarvení vrcholů čtverce, kdy právě 2 vrcholy jsou b a 2 vrcholy jsou c, dále existují 3 různá obarvení vrcholů čtverce, kdy právě 2 vrcholy mají barvu b a ze zbývajících dvou vrcholů je jeden c a druhý m.

6. Symbolika O, Ω, Θ, složitost algoritmů

Standardním nástrojem využívaným k popisu chování algoritmů (jako funkce velikosti vstupu n) je tzv. symbolika „velké o“, „velké omega“ a „velké théta“, která charakterizuje asymptotické chování funkcí, resp. posloupností (tj. charakterizuje jejich chování pro „dostatečně velké“ hodnoty argumentu n).

Jedním ze standardních přístupů k hodnocení efektivnosti algoritmů je analýza jejich paměťové a časové složitosti. Paměťovou složitostí budeme rozumět, zjednodušeně řečeno, odhad velikost paměti potřebné k realizaci výpočtu pomocí daného algoritmu pro úlohu

Definice

Nechť $f, g: N \to R$ jsou reálné posloupnosti. Potom:

a) $O\big(g(n)\big) = \{f(n) | (\exists K > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)\ \ 0 \leq |f(n)| \leq K|g(n)|\}$

b) $\Omega\big(g(n)\big) = \{f(n) | (\exists K > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)\ \ 0 \leq Kg(n) \leq f(n)\}$

c) $\Theta\big(g(n)\big) = \{f(n) | (\exists K_1, K_2 > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)\ \ 0 \leq K_1 g(n) \leq f(n) \leq K_2 g(n)\}$

Poznámky

- Symbol O zavedl matematik P. Bachmann (1837-1920) a ve svých pracích zpopularizoval E. Landau (neplést s fyzikem L. D. Landauem, nositelem Nobelovy ceny za fyziku (1962)). Symboly Ω, Θ zavedl respektovaný matematik a informatik D. Knuth (1938), autor vynikající třídílné knihy The Art of Computer Programming Vol. 1: Fundamental Algorithms, Vol. 2: Seminumerical Algorithms a Vol. 3: Sorting and Searching, se kterou by se měl seznámit každý programátor.
- Jako $g(n)$ se často uvažují následující funkce: 1 (konstanta); n; $n \log n$; n^2; $n^2 \log n$; ...; 2^n; $n!$; n^n. Platí: $O(1) \subset O(n) \subset O(n \log n) \subset O(n^2) \subset O(n^2 \log n) \subset \cdots \subset O(2^n) \subset O(n!) \subset O(n^n)$.
- $O\big(g(n)\big)$ je množina všech reálných posloupností, které až na kladnou multiplikativní konstantu nerostou rychleji než posloupnost $g(n)$. Píšeme $f(n) \in O\big(g(n)\big)$, resp. méně přesně $f(n) = O\big(g(n)\big)$.
- $\Omega\big(g(n)\big)$ je množina všech reálných posloupností, které až na kladnou multiplikativní konstantu rostou alespoň tak rychle jako posloupnost $g(n)$. Píšeme $f(n) \in \Omega\big(g(n)\big)$, resp. méně přesně $f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$.
- $\Theta\big(g(n)\big)$ je množina všech reálných posloupností, které až na kladnou multiplikativní konstantu rostou stejně rychle jako posloupnost $g(n)$. Píšeme $f(n) \in \Theta\big(g(n)\big)$, resp. méně přesně $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$.
- Např. platí:

$3n^2 + 17^{235\,139} \in O(n^2)$ $\qquad$ $3n^2 + 17^{235\,139} \notin O(n)$

$3n^2 + 17^{235\,139} \in O(n^3)$ $\qquad$ $3n^2 + 17^{235\,139} \notin \Theta(n^3)$

$\sin x \in O(1)$ $\qquad$ $\sin x \notin \Omega(n)$

$\frac{17n^8 - 375n^7 + 5n^2 + 100^{1734}}{531n^3 + n + 5} \in O(n^5)$ $\qquad$ $\frac{17n^8 - 375n^7 + 5n^2 + 100^{1734}}{531n^3 + n + 5} \in \Theta(n^5)$

$\sum_{i=1}^{n} i \in O(n^2)$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \in O(\log n)$

Následující tvrzení shrnuje základní vlastnosti zavedených symbolů.

Tvrzení

Platí:

- $f \in O(g) \ \to Kf \in O(g)$, kde K je konstanta,
- $f_1, f_2 \in O(g) \ \to f_1 + f_2 \in O(g)$,

- $f_1 \in O(g_1), f_2 \in O(g_2) \ \rightarrow (f_1 + f_2) \in O(g_1 + g_2), (f_1 + f_2) \in O(\max(|g_1|, |g_2|)), (f_1 f_2) \in O(g_1 g_2),$
- $f \in O(g) \ \leftrightarrow \ g \in \Omega(f)$
- $f \in \Theta(g) \ \leftrightarrow \ \big(f \in O(g) \ \wedge \ f \in \Omega(g)\big) \leftrightarrow \ \big(f \in O(g) \ \wedge \ g \in O(f)\big)$
- $a, b > 1 \ \rightarrow O(\log_a n) = O(\log_b n),$
- Je-li f polynom stupně n, g polynom stupně m, kde $n \geq m$ potom $f \in O(x^n)$, $f/g \in O(x^{n-m})$.

Důkaz - proveďte jako samostatné cvičení.

7. Rekurzivní algoritmy divide and conquer

Rekurzivní algoritmy divide and conquer jsou významným typem algoritmů využívaným k řešení široké třídy úloh (nejenom kombinatorických). Strategie řešení je založena na opakovaném rozdělování řešené úlohy na podúlohy stejného typu, ale menšího rozsahu (přibližně stejného). Dělení na podúlohy opakujeme do doby, než dostaneme úlohy „dostatečně“ malého rozsahu, jejichž řešení snadno zvládneme.

Otázkou, kterou se budeme krátce zabývat, je analýza časové složitosti těchto algoritmů. Nejprve však výše uvedený neformální popis formalizujeme, tj. převedeme do matematické podoby.

Označíme-li

$f(n)$ ... časová složitost algoritmu aplikovaného na vyřešení úlohy o rozsahu $n \in N^+$
(obvykle vyjádřená počtem „základních“ operací nutných k vyřešení úlohy o rozsahu n),

a ... počet podúloh ($1 \leq a < n$), na které převádíme řešení původní úlohy,

$\lfloor n/b \rfloor$[4] ... rozsah podúlohy ($1 < b < n$).

dostáváme pro časovou složitost rekurentní vztah

$$f(n) = af\left(\lfloor n/b \rfloor\right) + h(n),$$

s počáteční podmínkou $f(1) = c$.

Interpretace uvedeného rekurentního vztahu je zřejmá - řešení úlohy o rozsahu n převádíme na řešení a podúloh téhož typu, každá o rozsahu $\lfloor n/b \rfloor$, kde $h(n)$ vyjadřuje časovou složitost rozdělení na podúlohy a zpětného převedení řešení podúloh na řešení původní úlohy.

Nyní uvážíme dva základní tvary funkce $h(n)$, totiž konstantu c a přirozenou mocninu n.

a) Předpokládejme $h(n) = c$
(rozdělení na podúlohy a sestavení řešení původní úlohy z řešení podúloh trvá konstantní čas, nezávislý na rozsahu úlohy)

Základní představu o chování časové složitosti $f(n)$ získáme tím, že o rozsahu úlohy budeme předpokládat, že je přirozenou mocninou b, tj. omezíme se na $n \in S_b = \{b^k | k \in N\}$. Tím se „zbavíme“ funkce dolní celá část a řešíme rekurentní vztah

$$f(n) = af\left(n/b\right) + c, f(1) = c,$$

kde $n \in S_b = \{b^k | k \in N\}, a, b, c \in N^+, b \geq 2$.
Vzhledem k $n = b^k$ snadno nalezneme explicitní řešení, neboť $f(n) = c\left(a^k + \cdots + a + 1\right)$, tj.

$$f(n) = \begin{cases} c(k+1), & a = 1 \\ c\frac{a^{k+1}-1}{a-1}, & a \geq 2 \end{cases}.$$

Výše uvedené upravíme tak, abychom získali výrazy s proměnnou n (dostaneme tvary, z nichž bude evidentní chování $f(n)$). Jelikož $n = b^k$, je $k = \log_b n$, dále $a^k = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_b n}$, tj. $a^k = n^{\log_b a}$ dostáváme

$$f(n) = \begin{cases} c(\log_b n + 1), & a = 1 \\ c\frac{an^{\log_b a}-1}{a-1}, & a \geq 2 \end{cases}.$$

[4] Symbol $\lfloor \quad \rfloor$ označuje dolní celou část.

Důsledkem je následující tvrzení.

Tvrzení

Nechť $f(n)$ je rostoucí na N^+, pro kterou na množině $S_b = \{b^k | k \in N\}$ platí

$$f(n) \leq af\left({}^{n}/_{b}\right) + c,\ f(1) \leq c,$$

kde $a, b, c \in N^+, b \geq 2$, potom

$$f(n) \in O\left(\log_b n\right) \text{ pro } a = 1 \text{ a } f(n) \in O\left(n^{\log_b a}\right) \text{ pro } a \geq 2.$$

Poznámka

Je dobré si uvědomit, že ve výše uvedeném tvrzení (i v následujícím) jde věcně o $\log_b$ tj. logaritmus se základem b, nicméně vzhledem k tomu, že zkoumáme asymptotické chování $f(n)$, tj. využíváme symboliku „velké O“, lze použít jako základ libovolné reálné číslo větší než 1.

Příklad

Určete časovou složitost algoritmu vyhledávání v binárním vyhledávacím stromu.

Řešení.

Označíme-li $f(n)$ funkci časové složitost vyhledávání v binárním vyhledávacím stromu o velikosti n, zřejmě platí (zdůvodněte)

$$f(n) = f\left({}^{n}/_{2}\right) + 2,$$

kde $f(1) = 2$.

Dostáváme tak hodnoty $a = 1, b = 2, c = 2$ a pro časovou složitost proto dle výše uvedeného tvrzení platí

$$f(n) \in O\left(\log_2 n\right).$$

b) Předpokládejme $h(n) = rn^d, r \in R^+, d \in N^+$

Tvrzení

Nechť $f(n)$ je rostoucí na N^+, pro kterou na množině $S_b = \{b^k | k \in N\}$ platí

$$f(n) \leq af\left({}^{n}/_{b}\right) + rn^d, f(1) \leq c,$$

kde $a, b, c \in N^+, b \geq 2$, potom

$f(n) \in O\left(n^d\right)$ pro $a < b^d$,

$f(n) \in O\left(n^d \log n\right)$ pro $a = b^d$,

$f(n) \in O\left(n^{\log a}\right)$ pro $a > b^d$

Příklad

Určete časovou složitost řadícího algoritmu označovaného jako merge sort.

Řešení.

Označíme-li $f(n)$ funkci časové složitosti řadícího algoritmu merge sort pracujícího nad daty o rozsahu n, zřejmě platí (zdůvodněte)

$$f(n) = 2f\left({}^{n}/_{2}\right) + (n - 1),$$

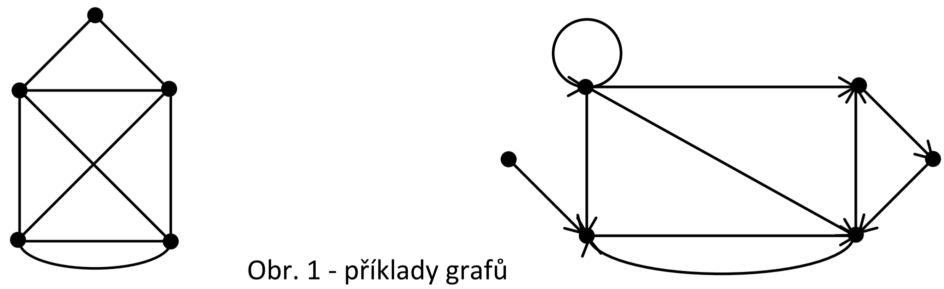
kde $f(1) = 0$.

Dostáváme tak hodnoty $a = 2, b = 2, c = 0$ a pro časovou složitost proto dle výše uvedeného tvrzení platí

$$f(n) = O\left(n \log_2 n\right).$$

8. Úvod do teorie grafů

Pojem graf se v matematice běžně používá ve dvou významech - jako označení pro grafické znázornění průběhu nějaké funkce (nemusí jít nutně o funkci) nebo pro abstraktní matematickou strukturu, kterou lze graficky znázornit jako body v rovině (tzv. vrcholy, resp. uzly), kde některé jejich dvojice jsou „propojeny“ (ne)orientovanou čarou (tzv. hranou) - viz např. následující obrázky.



Obr. 1 - příklady grafů

Definice - neorientovaný graf

Neorientovaným grafem rozumíme uspořádanou dvojici $G = (V, H)$, kde $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ je neprázdná konečná množina, jejíž prvky nazýváme vrcholy (resp. uzly) a $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ je množina neuspořádaných dvojic $h_i = \{u_i, v_i\}$, kde $u_i, v_i \in V$. Prvky množiny H nazýváme neorientované hrany.

Poznámky

- Vzhledem k tomu, že se budeme zabývat neorientovanými grafy, budeme přívlastek neorientovaný (graf, hrana apod.) obvykle vynechávat.
- Je-li $h = \{u, v\} \in H$ hrana, potom vrcholy u a v nazýváme sousedními vrcholy, resp. koncové vrcholy hrany h. Říkáme také, že vrcholy u, v a hrana h jsou incidentní.
- Jsou-li $h_i, h_j \in H, i \neq j$ hrany takové, že $h_i = \{u, v\}$ a $h_j = \{u, v\}$, potom hrany h_i, h_j nazýváme paralelními hranami.
- Hranu $\{v, v\}$, kde $v \in V$ nazýváme smyčka.
- Graf, který neobsahuje paralelní hrany ani smyčky, nazýváme **jednoduchý graf**. V tomto případě lze psát $H \subseteq \binom{V}{2}$, kde $\binom{V}{2}$ označuje množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny V. Pro počet hran zřejmě platí $0 \leq |H| \leq \binom{|V|}{2}$.
- Graf, který může obsahovat paralelní hrany, ale neobsahuje smyčky, nazýváme **multigraf**. (viz např. graf v levé části na obr. 1)

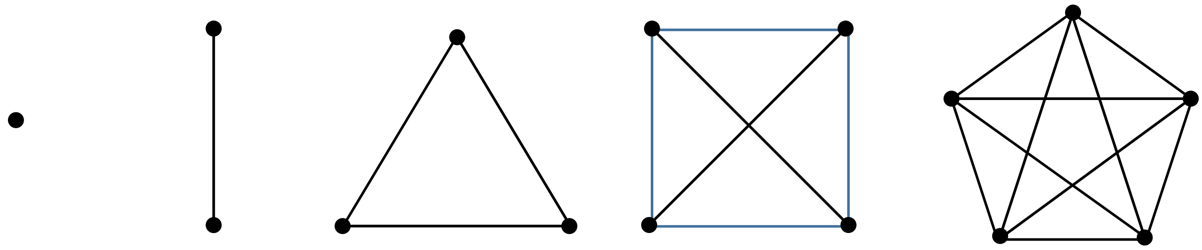
V aplikacích hrají důležitou roli hranově ohodnocené grafy a sítě.

Definice

- Hranově ohodnoceným grafem rozumíme uspořádanou trojici $G = (V, H, c)$, kde (V, H) je graf a $c: H \to R^+$ je zobrazení, které každé hraně $h \in H$ přiřazuje nezáporné reálné číslo $c(h)$ nazývané ohodnocení, resp. kapacita hrany h.
- Sítí rozumíme uspořádanou pětici $G = (V, H, c, z, s)$, kde (V, H, c) je hranově ohodnocený graf a $z, s \in V, z \neq s$. Vrchol z nazýváme zdroj a s nazýváme spotřebič.
- Vrcholově ohodnoceným grafem rozumíme uspořádanou trojici $G = (V, H, \varepsilon)$, kde (V, H) je graf a $\varepsilon: V \to R^+$ je zobrazení, které každému vrcholu $v \in V$ přiřazuje reálné číslo $\varepsilon(v)$ nazývané ohodnocení, resp. kapacita vrcholu v.

Poznámky - vybrané speciální grafy

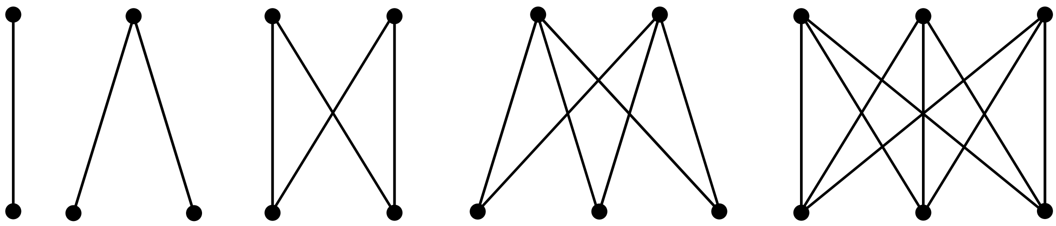
- $K_n = (V, H)$, kde $|V| = n, H = \binom{V}{2}$ ... úplný graf na n vrcholech ($n \in N^+$)



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

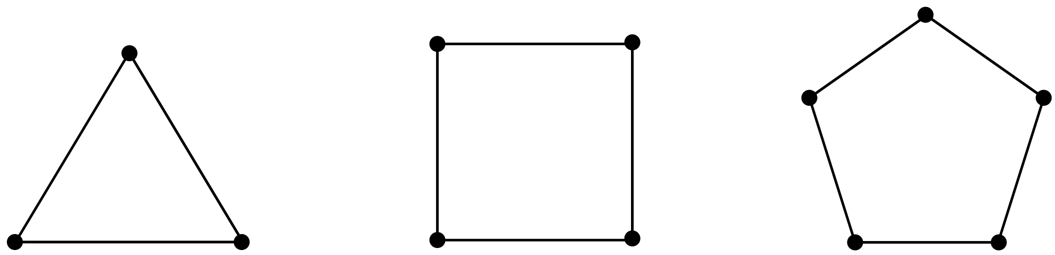
- $G = (V_1 \cup V_2, H)$, kde $V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset, V_1 \cap V_2 = \emptyset, V_1 \cap H \neq \emptyset, V_2 \cap H \neq \emptyset$ ... bipartitní graf (množinu vrcholů lze rozložit do dvou neprázdných disjunktních tříd V_1, V_2 tak, že hrany tvoří vybrané dvojice vrcholů, z nichž právě jeden je z V_1 a druhý z V_2)

- $K_{m,n} = (V_1 \cup V_2, H)$, kde $V_1 \cap V_2 = \emptyset, , |V_1| = m > 0, |V_2| = n > 0$ a $\forall v_1 \in V_1\ \forall v_2 \in V_2$ je $\{v_1, v_2\} \in H$ ... úplný bipartitní graf



$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{2,2}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$

- $C_n = (V, H)$, kde $V = \{v_1, \dots, v_n\}, H = \{h_1, \dots, h_n\}, h_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ pro $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ a $h_n = \{v_n, v_1\}$ ... kružnice na *n* vrcholech ($n \geq 3$).
(lze dodefinovat $C_1 = (V = \{v_1\}, H = \emptyset)$ a $C_2 = \big(V = \{v_1, v_2\}, H = \big\{\{v_1, v_2\}\big\}\big)$



C_3 C_4 C_5

Zejména z aplikačních důvodů jsou důležitým tématem možnosti zadávání grafů $G = (V, H)$:

a) Výčet vrcholů a hran
Spočívá ve výčtu všech vrcholů a hran (tj. všech dvojic vrcholů definujících hrany grafu).

b) Seznam vrcholů a jejich sousedů
Efektivní způsob zadávání grafů, zejména při jejich počítačové implementaci využívající spojové seznamy.

c) Matice sousednosti

$$A_G = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{|V|}, \text{ kde } a_{i,j} = \left|\left\{\left\{v_i, v_j\right\} \in H\right\}\right|.$$

($a_{i,j}$ udává počet hran „spojujících“ vrcholy v_i, v_j)

Matice sousednosti je symetrická (důsledek neorientovanosti hran). V případě multigrafů má navíc nulovou diagonálou (důsledek neexistence smyček).

d) Matice incidence

$$M_G = \left(m_{i,j}\right)_{i,j=1}^{|V|,|H|}, \text{ kde } m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{, jestliže } v_i \in h_j \\ 0 & \text{, jinde} \end{cases}.$$

(pokud h_j není smyčka, tak se v *j*-tém sloupci vyskytují právě dvě 1)

e) Nakreslení grafu

V rovině zvýrazníme body reprezentující uzly, dvojice uzlů tvořících hrany spojíme čarou (nikoliv nutně úsečkou). Poznamenejme, že je třeba rozlišovat mezi grafem jako abstraktní matematickou strukturou a jeho grafickou reprezentací, tj. jeho nakreslením. Prakticky každý graf lze nakreslit mnoha různými způsoby a nemusí být hned patrné, že jde např. o různé nakreslení jednoho a téhož grafu.

Příklad

Uvažujme výše zmíněný graf $K_{2,3}$, jehož vrcholy očíslujeme 1,...,5 (nejprve zleva horní „řadu“ a následně zleva dolní „řadu“). Dostáváme tak:

ad a) $V = \{1,2,3,4,5\}$ a $H = \{\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\}\}$

ad b) ↘

$$\begin{array}{lcl} 1 & \rightarrow & 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \\ \downarrow & & \\ 2 & \rightarrow & 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \\ \downarrow & & \\ 3 & \rightarrow & 1 \rightarrow 2 \\ \downarrow & & \\ 4 & \rightarrow & 1 \rightarrow 2 \\ \downarrow & & \\ 5 & \rightarrow & 1 \rightarrow 2 \end{array}$$

(šipky reprezentují ukazatele; první sloupec obsahuje seznam vrcholů, v řádku následuje seznam jejich sousedů)

ad c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ad d) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (hrany jsou číslovány 1,...,6 tak, jak jsou uvedeny v *H* v odrážce ad a))

Výše popsané způsoby zadávání grafů lze snadno rozšířit i na obecné neorientované grafy, tj. na grafy obsahující paralelní hrany i smyčky. Např. u matice sousednosti lze definovat $a_{i,j}$ jako počet hran „spojujících“ vrcholy v_i, v_j.

Důležitou charakteristikou grafu jsou stupně jeho vrcholů.

Definice - stupeň vrcholu, skóre grafu

Nechť $G = (V, H)$ je multigraf. Stupeň uzlu $v \in V$ značíme $d(v)$ a definujeme vztahem

$$d(v) = |\{h \in H | v \in h\}|,$$

tj. jako počet hran incidentních s v.

Posloupnost stupňů všech uzlů grafu seřazenou nerostoucím způsobem nazýváme skóre grafu, resp. grafovou posloupností.

Poznámky

- Vrchol stupně 0 nazýváme izolovaný vrchol.
- V případě, kdy uvažujeme grafy se smyčkami, definujeme stupeň $d(v)$ vrcholu v jako součet počtu hran incidentních s v (které nejsou smyčkami) a dvojnásobku počtu smyček incidentních s v.

Platí

Nechť $G = (V, H)$ je jednoduchý graf. Potom:

i) $\forall v \in V$ platí $0 \leq d(v) \leq |V| - 1$

ii) $\exists u, v \in V, u \neq v$ takové, že $d(u) = d(v)$

(v každém jednoduchém grafu existují alespoň dva vrcholy téhož stupně)

Důkaz

i) Z definice jednoduchého grafu (neobsahuje paralelní hrany ani smyčky) zřejmé.

ii) Zřejmé (v opačném případě by v jednoduchém grafu musel existovat uzel stupně 0 a stupně $|V| - 1$).

Platí (Euler)

V každém multigrafu $G = (V, H)$ platí $\sum_{v \in V} d(v) = 2|H|$. (počet vrcholů lichého stupně je vždy sudý)

Důkaz

Zřejmé, pokud uvážíme, že každá hrana je započítána do stupně právě dvou různých uzlů.

Poznámky

- Každému grafu odpovídá jediná grafová posloupnost. Snadno ale nahlédneme, že jedné posloupnosti může odpovídat více neizomorfních grafů (izomorfismus grafů - viz dále). Např. grafové posloupnosti $(2,2,2,2,2,2)$ odpovídají dva různé neizomorfní grafy.
- Tzv. Havlova redukce je základem algoritmu, který umožňuje rozhodnout, zda daná posloupnost je skóre nějakého jednoduchého grafu a současně dává návod, jak takový graf zkonstruovat. Myšlenka - z grafu odstraníme vrchol největšího stupně a současně odstraníme všechny hrany s tímto vrcholem incidentní. V důsledku odstranění hran snížíme stupně vrcholů incidentních s odstraněnými hranami.

Havlova redukce: je-li $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ grafová posloupnost, potom $\left(d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2} \dots, d_n\right)$ je grafová posloupnost.

Po konečném počtu opakovaní Havlovy redukce (po každé redukci získanou posloupnost opět seřadíme nerostoucím způsobem) dostaneme buď posloupnost samých nul (odpovídá diskrétnímu grafu), nebo posloupnost, která obsahuje záporné číslo a zřejmě není skóre žádného grafu.

Příklad

Rozhodněte, zda následující posloupnosti tvoří skóre nějakého jednoduchého grafu. V kladném případě graf s daným skóre sestrojte.

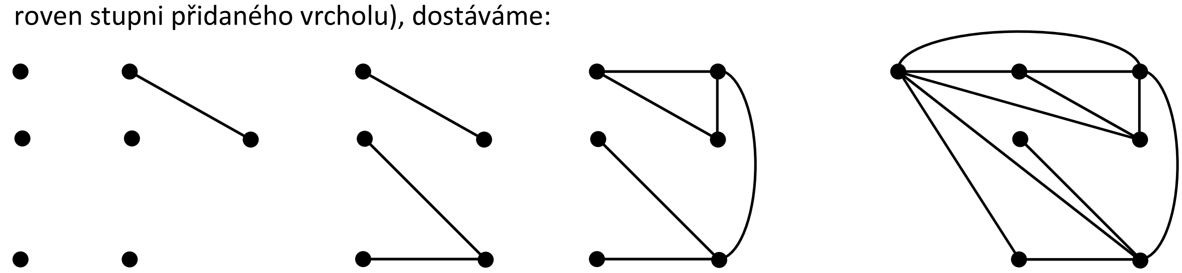
a) Posloupnost $(5,5,4,4,2,2)$ není skóre žádného jednoduchého grafu, neboť:

$$(5,5,4,4,2,2) \rightarrow (4,3,3,1,1) \rightarrow (2,2,0,0) \rightarrow (1,-1,0)$$

b) Posloupnost $(5,4,4,3,3,2,1)$ tvoří skóre grafu, neboť:

$$(5,4,4,3,3,2,1) \rightarrow (3,3,2,2,1,1) \rightarrow (2,1,1,1,1) \rightarrow (0,0,1,1) \dots (1,1,0,0) \rightarrow (0,0,0)$$

Postupujeme-li nyní zpět (od poslední posloupnosti, která odpovídá diskrétnímu grafu o třech vrcholech) tak, že v každém „zpětném“ kroku Havlovy redukce přidáme vrchol a hrany (počet přidávaných hran je roven stupni přidaného vrcholu), dostáváme:



$(0,0,0)$ $(1,1,0,0)$ $(2,1,1,1,1)$ $(3,3,2,2,1,1)$ $(5,4,4,3,3,2,1)$

Definice - podgraf, faktor, indukovaný podgraf

Řekneme, že graf $G_1 = (V_1, H_1)$ je **podgraf** grafu $G = (V, H)$, píšeme $G_1 \trianglelefteq G$, jestliže $V_1 \subseteq V$ a $H_1 \subseteq H$.

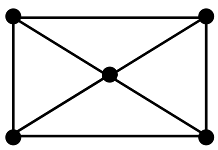
Poznámky

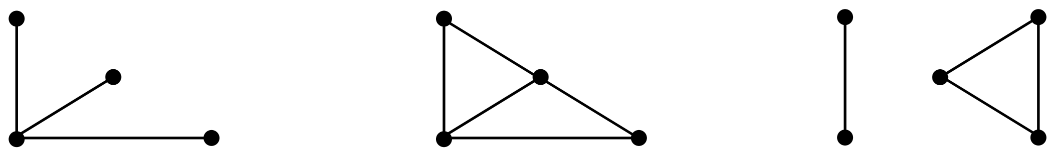
Existují dvě speciálně pojmenované kategorie podgrafů - tzv. faktor a indukovaný podgraf.

- Podgraf G_1 nazýváme **faktor**, jestliže $V_1 = V$.
  (faktor G_1 vznikne z G tak, že zachováme všechny jeho vrcholy a případně odstraníme některé hrany)
- Podgraf G_1 nazýváme **indukovaný** (množinou vrcholů V_1), jestliže
  $$V_1 \subseteq V \text{ a } H_1 = \big\{\{u,v\}\big| u,v \in V_1 \ \wedge\ \{u,v\} \in H\big\}.$$
  (vrcholy G_1 jsou podmnožinou vrcholů původního grafu a zachováme všechny možné hrany)

Dále je dobré si uvědomit, že v definici podgrafu nestačí požadovat pouze $V_1 \subseteq V$ a $H_1 \subseteq H$, ale je třeba, aby $G_1 = (V_1, H_1)$ byl graf, tj. aby platilo $H_1 \subseteq \big\{\{u,v\}\big| u,v \in V_1\big\}$.

Příklad

Graf  a příklady nakreslení jeho podgrafů:



podgraf (není faktor ani indukovaný) indukovaný podgraf faktor

Definice

Nechť $G = (V, H)$ je graf, $v \in V, h \in H$.

- Graf vzniklý z *G* odstraněním hrany *h* značíme $G - h$ a definujeme vztahem
  $$G - h = (V, H - \{h\})$$
  Je-li $H_1 \subseteq H$, potom $G - H_1$ označuje graf, který vznikne z G odstraněním všech hran $h \in H_1$.
- Graf vzniklý z *G* odstranění vrcholu *v* značíme $G - v$ a definujeme vztahem
  $$G - v = (V - \{v\}, H - \{h | v \in h\})$$
  Je-li $V_1 \subseteq V$, potom $G - V_1$ označuje graf, který vznikne z G odstraněním všech vrcholů $v \in V_1$.

- Graf vzniklý z *G* redukcí hrany $h = \{v_i, v_j\}$ značíme $G|h$ a definujeme vztahem

$$G \downarrow h = (\hat{V}, \hat{H}), \text{ kde } \hat{V} = (V - \{v_j\}) \text{ a } \hat{H} = \Big(H - \big\{\{v_j, v\} \in H\big\}\Big) \cup \Big\{\{v_i, v\} \Big| \{v_j, v\} \in H, v \neq v_i\Big\}$$

- Graf vzniklý z *G* dělením hrany $h = \{v_i, v_j\}$ značíme $G \uparrow h$ a definujeme vztahem

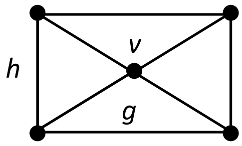
$$G \uparrow h = (\tilde{V}, \tilde{H}), \text{ kde } \tilde{V} = V \cup \{\tilde{v} | \tilde{v} \notin V\} \text{ a } \tilde{H} = (H - \{h\}) \cup \Big\{\{v_i, \tilde{v}\}, \{v_j, \tilde{v}\}\Big\}$$

- Je-li *G* jednoduchý graf, potom graf $G^C = (V, H^C)$, kde $H^C = \binom{V}{2} - H$ nazýváme doplněk grafu *G*.
- Je-li $G_1 \trianglelefteq G$, kde $G_1 = (V_1, H_1)$, potom doplněk podgrafu G_1 v G značíme $G - G_1$ a definujeme vztahem

$$G - G_1 = (V, H - H_1)$$

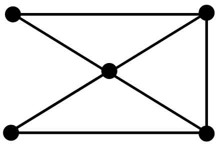
Příklad

Uvažujme graf $G = (V, H)$ jehož grafické znázornění je na níže uvedeném obrázku.



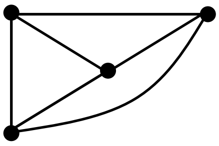
Potom nakreslení grafů $G - h, G - v, G \downarrow h, G \uparrow h, G^C$ může vypadat následovně:

$G - h$

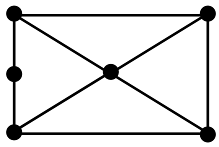


$G - v$

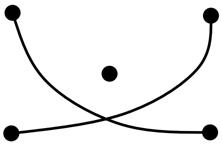
$G \downarrow g$



$G \uparrow h$



G^C



Definice - homeomorfismus

Řekneme, že grafy $G_1 = (V_1, H_1)$ a $G_2 = (V_2, H_2)$ jsou homeomorfní, jestliže existuje graf G takový, že G_1 i G_2 vzniknou z G konečným počtem dělení jeho hran.

Poznámka

Homeomorfismus lze interpretovat jako jistou formu podobnosti grafů zachovávající některé vlastnosti (viz např. odstavec rovinné grafy).

Definice - izomorfismus

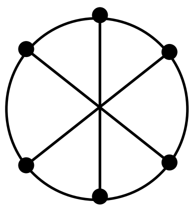
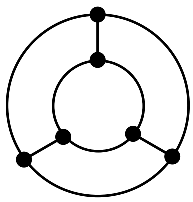
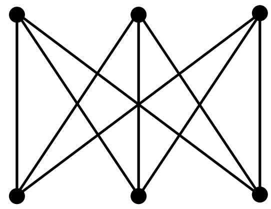
Řekneme, že grafy $G_1 = (V_1, H_1)$ a $G_2 = (V_2, H_2)$ jsou izomorfní, píšeme $G_1 \cong G_2$, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f: V_1 \xrightarrow{1-1} V_2$ takové, že $\{u, v\} \in H_1 \;\leftrightarrow\; \{f(u), f(v)\} \in H_2$.

Poznámky

- Izomorfismus grafů lze, až na případně různé označení vrcholů a hran, chápat jako „úplnou“ rovnost grafů jako abstraktních matematických struktur (izomorfismus je ekvivalence na množině všech grafů).
- Dosud není známý žádný algoritmus, který by byl schopen pro větší grafy dostatečně efektivně rozhodnout, zda jsou izomorfní.

Příklad

Rozhodněte, zda níže zobrazené grafy jsou izomorfní:

$G_1 = (V, H_1)$ $G_2 = (V, H_2)$ $G_3 = (V, H_3)$

(uvedené grafy mají stejná skóre, přesto nejsou všechny tři navzájem izomorfní)

8.1. Souvislost

V celé řadě případů jsou grafy matematickými modely reálných systémů, kde vrcholy reprezentují prvky systémů a hrany reprezentují jejich fyzická propojení. V tomto kontextu je zcela přirozené zavést následující pojmy.

Definice

Nechť $G = (V, H)$, $u, v \in V$. Potom posloupnost vrcholů $u = v_0, \dots, v_n = v$, kde $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\{v_{i-1}, v_i\} \in H$, nazýváme *u-v* sled. Je-li $u = v$, mluvíme o uzavřeném sledu.

Poznámka

u-v sled můžeme také interpretovat jako posloupnost na sebe navazujících hran $h_1, \dots, h_n$, po kterých se lze dostat z vrcholu *u* do *v* (tj. $u \in h_1, v \in h_n$ a $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $|h_{i-1} \cap h_i| = 1$).

Definice

Nechť $G = (V, H), u, v \in V$. Potom *u-v* sled $u = v_0, \dots, v_n = v$, kde $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ platí $\{v_{i-1}, v_i\} \neq \{v_{j-1}, v_j\}$ nazýváme *u-v* tah. Je-li $u = v$, mluvíme o uzavřeném tahu.

Poznámka

u-v tah můžeme také interpretovat jako posloupnost na sebe navazujících a neopakujících se hran $h_1, \dots, h_n$, po kterých se lze dostat z vrcholu *u* do *v*.

Definice

Nechť $G = (V, H)$, $u, v \in V$. Potom *u-v* sled $u = v_0, \dots, v_n = v$, kde $\forall i, j \in \{0, \dots, n\}, i \neq j$ platí $v_i \neq v_j$ nazýváme *u-v* cesta. Uzavřenou cestu (tj. cestu, kde $u = v$) nazýváme kružnicí.

Poznámky

- Snadno nahlédneme, že pokud v daném grafu existuje *u-v* sled, existuje v něm i *u-v* tah a také *u-v* cesta (*u-v* tah je *u-v* sled, ve kterém se neopakují hrany; *u-v* cesta je *u-v* tah, ve kterém se neopakuji vrcholy).
- Je-li $u = v_0, \dots, v_n = v$ sled/tah/cesta, potom číslo *n* nazýváme délkou sledu/tahu/cesty (= počet hran tvořících sled/tah/cestu).
- Snadno také nahlédneme, že graf je bipartitní právě tehdy, jestliže neobsahuje kružnici liché délky.
- Je-li $u = v_0, \dots, v_n = v$ sled/tah/cesta v hranově ohodnoceném grafu, potom $\sum_{i=1}^{n} c(\{v_{i-1}, v_i\})$ nazýváme vahou sledu/tahu/cesty (= součet ohodnocení hran tvořících sled/tah/cestu).

Na množině vrcholů libovolného grafu $G = (V, H)$, lze definovat relaci ~ následovně:

$\forall u, v \in V$ platí $u \sim v$ právě tehdy, jestliže v *G* existuje *u-v* cesta.

Relace ~ je zřejmě ekvivalence na *V* a definuje rozklad *V*. Třídy rozkladu se v tomto případě nazývají komponenty grafu.

Definice - souvislý graf

Řekneme, že graf $G = (V, H)$ je souvislý, jestliže má právě jednu komponentu.

Poznámka

- Souvislý graf lze zřejmě definovat také jako graf, kde $\forall u, v \in V$ existuje *u-v* cesta.
- Komponenta grafu je kterákoliv maximální, co do počtu vrcholů, souvislá část grafu.

Definice

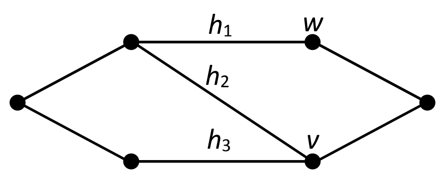
Nechť $G = (V, H)$ je graf.

- Množinu vrcholů $V_1 \subseteq V$ nazýváme vrcholovým řezem, jestliže graf $G - V$ má více komponent než graf G. Speciálně, je-li $V_1 = \{v\}$ (tj. jednoprvková množina), potom vrchol v nazýváme artikulace v grafu G.
- Množinu hran $H_1 \subseteq H$ nazýváme hranovým řezem, jestliže graf $G - H_1$ má více komponent než graf G. Speciálně, je-li $H_1 = \{h\}$ (tj. jednoprvková množina), potom hranu h nazýváme most grafu G.

Je-li H_1 hranový řez v hranově ohodnoceném grafu, potom $c(H_1) = \sum_{h \in H_1} c(h)$ nazýváme vahou řezu H_1.

Příklad

Množina $\{h_1, h_2, h_3\}$ je příkladem hranového řezu uvedeného grafu. Množina $\{v, w\}$ je příkladem vrcholového řezu. V daném grafu neexistuje most ani artikulace.



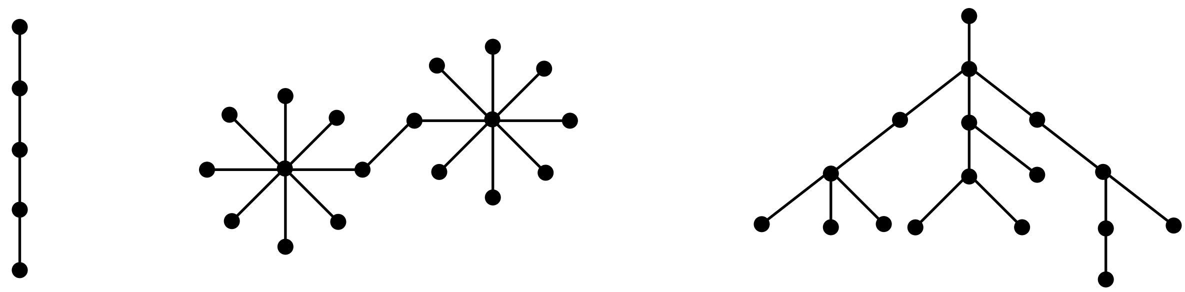
8.2. Stromy

Důležitou roli hrají minimální (co do počtu hran) souvislé grafy, tj. grafy ve kterých existuje mezi libovolnými dvěma vrcholy právě jedna cesta.

Definice - acyklický graf, les, strom

- Graf, který neobsahuje jako svůj podgraf kružnici, nazýváme acyklický graf (les).
- Acyklický a souvislý graf nazýváme strom.

Následující tři grafy jsou příklady stromů.



Platí

Nechť $G = (V, H)$ je graf. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

i) G je strom.

ii) G je acyklický a platí $|H| = |V| - 1$.

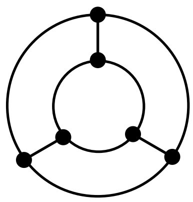
iii) G je souvislý a platí $|H| = |V| - 1$.

iv) $\forall u, v \in V$ existuje právě jedna *u*-*v* cesta.

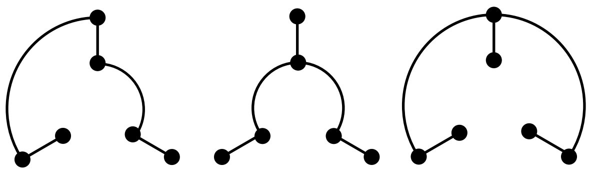
Definice

Nechť $G = (V, H)$ je graf. Každý jeho faktor, který je strom nazýváme kostra grafu.

Příklad

Graf z uvedeného obrázku  má celkem 12 koster.

Následující obrázek obsahuje nakreslení tří z nich.



Platí

Každý souvislý graf má kostru. Pokud daný souvislý graf není strom, má alespoň tři různé kostry. Všechny kostry grafu mají stejný počet hran. (zdůvodněte)

Poznámka

Jako „výsledek“ aplikace algoritmů BFS i DFS dostáváme kostru grafu.

Definice

Nechť $G = (V, H, c)$ je souvislý hranově ohodnocený graf. Potom minimální kostrou rozumíme takovou jeho kostru $T = (V, H_T)$, pro kterou je váha kostry $c(T) = \sum_{h \in H_T} c(h)$ nejmenší ze všech koster grafu *G*.

V celé řadě praktických aplikací teorie grafů hrají důležitou roli algoritmy pro nalezení minimální kostry grafu. V tomto kontextu je třeba zmínit, že čeští matematici (Otakar Borůvka - 1926, Vojtěch Jarník - 1930) byli první na světě, kteří takové algoritmy vymysleli v rámci řešení praktických úloh (ve světě to bylo o téměř o 30 let později).

Algoritmus_1 (Jarník - 1930; Prim - 1957)
Vstup: souvislý hranově ohodnocený graf $G = (V, H, c)$
Výstup: minimální kostra $T_{min} = (V_{min}, H_{min})$

$H_{min} := \emptyset$; $V_{min} := \{u\}$; (* začínáme v libovolném uzlu $u \in V$ *)
while $|H_{min}| < |V| - 1$ **do**
zvolíme $h \in H - H_{min}$ tak, že $(h \cap V_{min} \neq \emptyset) \ \wedge \ (h \cap (V - V_{min}) \neq \emptyset) \ \wedge$
$$c(h) = \min_{g \in H - H_{min}} \{c(g) \ | \ (g \in H - H_{min}) \ \wedge \ (g \cap V_{min} \neq \emptyset) \ \wedge \ (g \cap (V - V_{min}) \neq \emptyset)\}$$
$V_{min} := V_{min} \cup \big(h \cap (V - V_{min})\big)$; $H_{min} := H_{min} \cup \{h\}$
wend;

Poznámka
Konstrukce minimální kostry T_{min} začíná diskrétním grafem tvořeným libovolný vrcholem, přičemž v každém while cyklu rozšíříme T_{min} o nový vrchol, který je „nejblíže" ke stávajícímu T_{min} a o hranu „spojující" zvolený vrchol s T_{min}.

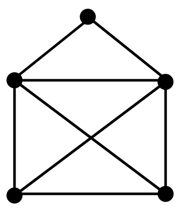
Algoritmus_2 (Kruskal)
Vstup: souvislý hranově ohodnocený graf $G = (V, H, c)$, kde $|H| = m$
Výstup: minimální kostra $T_{min} = (V, H_{min})$

hrany H uspořádej neklesajícím způsobem dle jejich ohodnocení, tj. $c(h_1) \leq c(h_2) \leq \cdots \leq c(h_m)$;
$H_{min} := \emptyset$;
for *i*:=1 **to** *m*
if $(H_{min} \cup \{h_i\})$ neobsahuje kružnici **then** $H_{min} := H_{min} \cup \{h_i\}$
next *i*;

(výše uvedené algoritmy lze samozřejmě využít i k nalezení kostry hranově neohodnocených souvislých grafů)

8.3. Eulerovské grafy

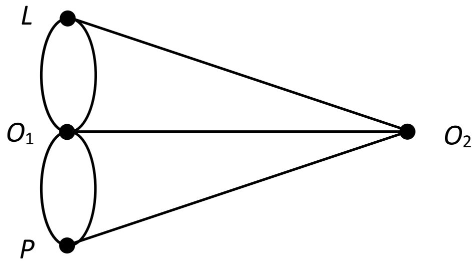
Eulerovské grafy označujeme také jako jednotažky. Motivace pro toto označení je následující - jde o grafy, které lze nakreslit jedním nepřerušeným tahem, např. jako známý „domeček".



Definice - eulerova kružnice, eulerovský tah, eulerovský graf
Nechť $G = (V, H)$ je multigraf. Eulerovskou kružnicí rozumíme libovolný uzavřený tah, který obsahuje všechny hrany daného grafu. Eulerovským tahem rozumíme libovolný otevřený tah, který obsahuje všechny hrany daného grafu. Eulerovským grafem pak rozumíme multigraf, ve kterém existuje eulerovská kružnice, nebo eulerovský tah.

Poznámka
Označení eulerovské grafy bylo zavedeno na počest vynikajícího švýcarského matematika Leonarda Eulera (1707 - 1783), který je považován za zakladatele teorie grafů jako matematické disciplíny. Současně vyřešil

(1736) problém sedmi mostů města Königsberk, který lze formulovat následovně - lze níže uvedený graf nakreslit jedním tahem?
(vrcholy L, P odpovídají dvěma břehům řeky Pregoly a vrcholy O_1 a O_2 dvěma ostrovům, hrany reprezentují mosty mezi břehy a ostrovy)



Platí
a) V souvislém multigrafu $G = (V, H)$ existuje eulerovská kružnice právě tehdy, jestliže všechny vrcholy mají sudý stupeň. V tomto případě eulerovská kružnice začíná a také končí v libovolně zvoleném vrcholu.
b) V souvislém multigrafu $G = (V, H)$ existuje otevřený eulerovský tah právě tehdy, jestliže právě dva jeho vrcholy mají lichý stupeň. V tomto případě eulerovský tah začíná v jednom z vrcholů lichého stupně a konči v druhém z vrcholů lichého stupně.

Výše uvedené je jednoduché kritérium umožňující rozhodnout, zda daný graf je eulerovský. Další otázkou je, jak danou eulerovskou kružnici/tah zkonstruovat. Odpověď dává následující jednoduchý a zřejmý algoritmus.

Fleuryho algoritmus
Vstup: eulerovský multigraf graf $G = (V, H)$, $a \in V$ ... počáteční vrchol eulerovské kružnice, resp. eulerovského tahu
Výstup: fronta Q obsahující posloupnost vrcholů tvořících eulerovskou kružnici, resp. eulerovský tah

$u := a$; create(Q); enqueue(u);
while $d(u) > 0$ **do**
if $d(u) > 1$ **then** (* $d(u) \geq 2$; jako další hranu eulerovské kružnice/tahu zvol libovolnou hranu incidentní s u, která není most *)
$h := \{\{u, v\} | \text{není most}\}$
else (* $d(u) = 1$; další hranu eulerovské tahu/kruž. tvoří jediná hrana incidentní s u *)
$h := \{u, v\}$
endif;
$u := v$; enqueue(u); $G := G - h$
wend;

Poznámka
Klasickou úlohou (s aplikačním potenciálem) je následující úloha označovaná jako čínský problém listonoše (Meigu Guan, 1962) - v souvislém hranově ohodnoceném multigrafu grafu $G = (V, H, c)$ nalezněte uzavřený sled minimální váhy, který obsahuje každou hranu grafu.

Edmonds-Johnsonův algoritmus (polynomiální, řešící čínský problém listonoše)
Vstup: $G = (V, H, c)$ je souvislý hranově ohodnocený multigraf
Výstup: uzavřený sled minimální váhy obsahující každou hranu grafu

- Jsou-li stupně všech vrcholů grafu G sudé, je řešením čínského problému listonoše eulerovská kružnice, kterou zkonstruujeme Fleuryho algoritmem. Jinak označme S množinu všech vrcholů z V, které mají lichý stupeň.

- Označme K_S úplný graf na množině S, jehož každou hranu $\{u, v\}$ ohodnotíme vahou $d_{u,v}$ nejkratší u-v cesty v grafu G. (připomeňme, že váha cesty je rovna součtu ohodnocení hran tvořících cestu)
- V hranově ohodnoceném grafu K_S nalezni perfektní párování nejmenší váhy (zdůvodněte existenci příslušného perfektního párování).
- Každé hraně zahrnuté do minimálního perfektního párování odpovídá nejkratší cesta v G. Hrany této cestu duplikuj (včetně jejich ohodnocení). Takto vznikne graf $G^* = (V, H^*, c^*)$, který má všechny vrcholy sudého stupně a tedy obsahuje eulerovskou kružnici, která je řešením čínského problému listonoše.

8.4. Hamiltonovské grafy

Definice

Nechť $G = (V, H)$ je graf. Potom každý jeho faktor, který je kružnicí, nazýváme hamiltonovská kružnice. Graf, ve kterém existuje hamiltonovská kružnice, nazýváme hamiltonovský graf.

Platí

Nechť $G = (V, H)$ je graf. Potom platí:

i. Jestliže $|V| = n \geq 3$ a $\forall v \in V \;\; d(v) \geq {}^{n}/_{2}$, potom je G hamiltonovský.
ii. Jestliže $|V| = n \geq 3$ a $\forall u, v \in V$ takové, že $\{u, v\} \notin H$ platí $d(v) + d(v) \geq n$, potom je G hamiltonovský.
iii. Jestliže $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ a $\forall i \; 1 \leq i \leq {}^{n}/_{2}$ platí $(d_i > i) \vee (d_{n-i} \geq n - i)$, potom je G hamiltonovský.

Poznámky

- Platí, že skoro všechny „dostatečně velké "grafy jsou hamiltonovské.
  Uvažujme následující konstrukci - máme graf $G = (V, \emptyset), |V| = n$, tj. diskrétní graf na n vrcholech, do kterého postupně náhodně přidáváme hrany, dokud nezačne platit, že $\min\{d(v) | v \in V\} = 2$. Potom
  $$\lim_{n \to \infty} Pst(G \text{ je hamiltonovský}) = 1.$$
  (Pst označuje pravděpodobnost)
- Problém obchodního cestujícího
  V úplném hranově ohodnoceném hrafu K_n nalezněte hamiltonovskou kružnici nejmenší váhy (váha kružnice = součet ohodnocení hran tvořících kružnici). Je zřejmé, že každý úplný graf je hamiltonovský a tedy problém obchodního cestujícího má řešení.

8.5. Rovinné grafy

Důležitou kategorií grafů jsou tzv. rovinné grafy.

Definice

Rovinným nakreslením grafu rozumíme takové jeho nakreslení v rovině, kde čáry reprezentující hrany nemají až na vrcholy žádný společný bod.

Příklad

Následující obrázky obsahují dvě nakreslení grafu $K_{2,3}$ - první je ukázka nakreslení, které není rovinné, druhé je ukázka rovinného nakreslení.

Definice

Řekneme, že graf $G = (V, H)$ je rovinný, jestliže existuje jeho rovinné nakreslení.

Poznámky

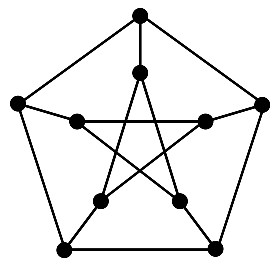
- Graf není rovinný, jestliže neexistuje jeho rovinné nakreslení (nikoliv, když ho neumíme nakreslit bez „křížení“ hran). Vzhledem k tomu, že graf lze nakreslit mnoha způsoby (které mohou vypadat značně různě), nemusí být úplně snadné prokázat, že daný graf není rovinný.
- Snadno si uvědomíme, že pokud je graf *G* rovinný, potom každý graf, který z něho vznikne konečným počtem operací dělení hran, je také rovinný (homeomorfismus grafů zachovává rovinnost).

Platí (Kuratowski)

Graf je rovinný právě tehdy, jestliže neobsahuje podgraf homeomorfní s $K_{3,3}$ nebo K_5.

Příklad

Ukažte, že zobrazený Petersenův graf není rovinný.



9. Přílohy

9.1. Přehled značení

$\wedge$	… logická spojka „a“ (konjunkce)
$\vee$	… logická spojka „nebo“ (disjunkce)
$\rightarrow$	… implikace (jestliže ... potom)
$\leftrightarrow$	… ekvivalence (právě když)
$\overline{}$, resp. $\neg$	… negace
N	… množina přirozených čísel 0,1,2, …
N^+	… množina kladných přirozených čísel
Z	… množina celých čísel
Q	… množina racionálních čísel
R	… množina reálných čísel
C	… množina komplexních čísel
$\{a_1, \dots, a_n\}$	… neuspořádaná n-tice, tj. množina skládající se z prvků $a_1, \dots, a_n$
$(a_1, \dots, a_n)$	… uspořádaná n-tice
$\{a \| V(a)\}$	… množina prvků s vlastností V
$A \cap B$	… průnik množin A, B
$A \cup B$	… sjednocení množin A, B
$A - B$	… rozdíl množin A, B
$\bar{A}$	… doplněk množiny A
$A \times B$	… kartézský součin množin A, B
$P(A)$	… potenční množina (systém všech podmnožin množiny A)
$\|A\|$	… počet prvků (mohutnost, kardinalita) množiny A
$f(a)$	… hodnota funkce f v bodě a
$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, resp. $(a_n)_{n=0}^{\infty}$	… číselná posloupnost
$\lceil x \rceil$	… horní celá část reálného čísla x
$\lfloor x \rfloor$	… dolní celá část reálného čísla x
$\{x\}$	… lomená část x
$C_n^k, \binom{n}{k}$	… rozšířený binomický koeficient ($k, n \in Z$), resp. kombinační číslo ($0 \leq k \leq n$)
$\bar{C}_n^k$	… počet kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním ($0 \leq k, n$)
A_n^k	… počet variací k-té třídy z n prvků bez opakování ($0 \leq k \leq n$)
$\bar{A}_n^k$	… počet variací k-té třídy z n prvků s opakováním ($0 \leq k, n$)
$P(n), P_n$	… počet permutací n-tého řádu/třídy (bez opakování)
$P(n_1, \dots, n_k), P_{n_1,\dots,n_k}$	… počet permutací s opakováním (n_1 prvků 1. druhu,…, $n_k$prvků k-tého druhu)
$D(n), D_n$	… subfaktoriál n-tého řádu (permutace, kde nezůstává žádný prvek na svém místě)
$D_k(n), D_{n,k}$	… počet permutací n-tého řádu, ve kterých zůstává právě k prvků na svém místě
C_n	… Catalanovo číslo
$\left\{ n \atop k \right\}$	... Stirling subset number ($0 \leq k \leq n$)
$s(n, k)$	... Stirlingova čísla 1. druhu
$\left[n \atop k \right]$	... Stirling cycle number ($0 \leq k \leq n$)
$S(n, k)$	... Stirlingova čísla 2. druhu

9.2. Tabulka hodnot subfaktoriálů

n	D_n	n	D_n
0	1	11	14 684 570
1	0	12	176 214 841
2	1	13	2 290 792 932
3	2	14	32 071 101 049
4	9	15	481 066 515 734
5	44	16	7 697 064 251 745
6	265	17	130 850 092 279 664
7	1 854	18	2 355 301 661 033 953
8	14 833	19	44 750 731 559 645 106
9	133 496	20	895 014 631 192 902 121
10	1 334 961	21	18 795 307 255 050 944 540

9.3. Tabulka hodnot Fibonacciho čísel

n	F_n	n	F_n	n	F_n
0	0	15	610	30	832 040
1	1	16	987	31	1 346 269
2	1	17	1 597	32	2 178 309
3	2	18	2 584	33	3 524 578
4	3	19	4 181	34	5 702 887
5	5	20	6 765	35	9 227 465
6	8	21	10 946	36	14 930 352
7	13	22	17 711	37	24 157 817
8	21	23	28 657	38	39 088 169
9	34	24	46 368	39	63 245 986
10	55	25	75 025	40	102 334 155
11	89	26	121 393	41	165 580 141
12	144	27	196 418	42	267 914 296
13	233	28	317 811	43	433 494 437
14	377	29	514 229	44	701 408 733

9.4. Tabulka hodnot Catalanových čísel

n	C_n	n	C_n	n	C_n
0	1	7	429	14	2 674 440
1	1	8	1 430	15	9 694 845
2	2	9	4 862	16	35 357 670
3	5	10	16 796	17	129 644 790
4	14	11	58 786	18	447 638 700
5	42	12	208 012	19	1 767 263 190
6	132	13	742 900	20	6 564 120 420

9.5. Tabulka hodnot Stirlingových čísel 1. druhu $s(n,k)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	-1	1								
3	0	2	-3	1							
4	0	-6	11	-6	1						
5	0	24	-50	35	-10	1					
6	0	-120	274	-225	85	-15	1				
7	0	720	-1 764	1 624	-735	175	-21	1			
8	0	-5 040	13 068	-13 132	6 769	-1 960	322	-28	1		
9	0	40 320	-109 584	118 124	-67 284	22 449	-4 536	546	-36	1	
10	0	-362 880	1 026 576	-1 172 700	723 680	-269 325	63 273	-9 450	870	-45	1

9.6. Tabulka hodnot Stirlingových čísel 2. druhu $S(n,k)$

(Stirling subset numbers $\left\{ {n \atop k} \right\}$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1 701	1 050	266	28	1		
9	0	1	255	3 025	7 770	6 951	2 646	462	36	1	
10	0	1	511	9 330	34 105	42 525	22 827	5 880	750	45	1