Název předmětu: **Úvod do diskrétní matematiky**

Zkratka předmětu: **KAP/UDMK**

Počet kreditů: 4

Forma studia: kombinovaná

Způsob ukončení: **klasifikovaný zápočet**

Anotace:
Předmět je úvodem do klasické kombinatoriky a teorie grafů.

Doporučená literatura:
Koucký M.: UDME_skripta_1.pdf (elektronické skriptum, web Katedry aplikované matematiky FP TUL)

Garant a přednášející: doc. RNDr. Miroslav Koucký, CSc.

Podmínky udělení klasifikovaného zápočtu

1. Odevzdat vyučujícímu správně vyřešené (a řádně okomentované) zadané úlohy alespoň 2 pracovní dny před ústní rozpravou. Vyřešené úlohy lze poslat mailem na adresu miroslav.koucky@tul.cz v některém z následujících formátů: DOC, DOCX, RTF, PDF (celková velikost max. 4 MB).
2. Úspěšné absolvování ústní rozpravy. Účast u rozpravy je podmíněna splněním bodu 1. Během ústní rozpravy student obhajuje své řešení. Rozprava je úspěšná pouze v případě, že student prokáže elementární znalost a porozumění použitým pojmům a metodám. Během ústní rozpravy je možné využít své zápisky.
3. Student získá klasifikovaný zápočet pouze v případě, že úspěšně splní veškeré výše uvedené podmínky (body 1. a 2.) a to nejpozději do posledního termínu pro plnění studijních povinností akademického roku 2019/20 (viz příslušný harmonogram ak. roku 2019/20). V tomto případě se klasifikace odvíjí od úrovně formálního zpracování odevzdaného řešení zadaných úloh, odborné úrovně odevzdaného řešení zadaných úloh a od průběhu ústní rozpravy.

Předpokládané znalosti

- Tvary komplexních čísel, počítání s komplexními čísly, Laplace-Moivreův vzorec.
- Posloupnost, operace s posloupnostmi (součet, vynásobení skalárem, konvoluce). Množina všech posloupností jako vektorový prostor (lineární kombinace, lineární (ne)závislost, dimenze).
- Funkce, derivace, integrál.

Obsah samostudia

Úvod do klasické kombinatoriky

- (ne)uspořádaná *n*- tice, kartézský součin; funkce dolní/horní celá část;
- pravidlo součtu, součinu, Dirichletův princip, princip inkluze a exkluze (IE);
- variace bez opakování A_n^k, s opakováním $\bar{A}_n^k$; permutace bez opakování P_n, s opakováním $P_{n_1,\dots,n_k}$;
- kombinace bez opak. C_n^k, vlastnosti. Pascalův Δ $\rightarrow$ zobecnění Pascalův Δ a zobecněný binomický koef.;
- kombinace s opakováním $\bar{C}_n^k$
- Binomická a multinomická věta, Newtonův vzorec.

Kombinatorika s omezujícími podmínkami

- Subfaktoriály, odvození, vlastnosti.
- Catalanova čísla $C_n, n \in N$ (různé způsoby odvození: počet cest z [0,0] do [n,n], které nepřekročí diagonálu, počet permutací realizovatelných pomocí zásobníku; počet různých způsobů uzávorkování $x_0 \cdot x_1 \cdot \cdots \cdot x_n$); Odvození rekurentního vztahu a vytvořující funkce.
- Fibonacciho posloupnost, rek. i explicitní vztah, vytvořující funkce, základní vlastnosti.

Úvod do problematiky rozkladů

- pojmy rozklad množiny, varianty (ne/rozlišitelné objekty, ne/rozlišitelné třídy)
- *n* nerozlišitelných objektů do *k* rozlišitelných tříd (obecná omezeními počtu prvků ve skupinách $a_i \leq x_i \leq b_i$) = počet řešení diofantické rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n, a_i \leq x_i \leq b_i$ → vytvořující funkce;
- *n* nerozlišitelných objektů do nerozlišitelných tříd = rozklady přirozeného čísla *n* na kladné sčítance = počet řešení diof. rovnice $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = n$; další varianty: předepsané sčítance $a_1, \dots, a_k$;
- Stirling subset number (2. druhu) $\left\{ n \atop k \right\}$ = počet rozkladů *n*-prvkové množiny na *k* podmnožin (tj. ekvivalence na *n*-prvkové množině mající právě *k* tříd), vlastnosti (hodnoty, rekurence); trojúhelník pro $\left\{ n \atop k \right\}$;
- Stirling cycle number (1. druhu) $\left[n \atop k \right]$, definice, vlastnosti (hodnoty, rekurence; trojúhelník pro $\left[n \atop k \right]$;

Obsah prezenční části výuky

1. blok prezenční výuky (pá 6. 3. 2019, 14:20-19:30; G303)

Posloupnosti

- definice, operace sčítání, násobení skalárem, konvoluce;
- diference posloupnosti $\left(\Delta a_n = a_{n+1} - a_n;\ \Delta^{(k)} a_n = \Delta\left(\Delta^{(k-1)} a_n\right)\right)$

Rekurentní vztahy a jejich řešení

- motivace (Fibonacciho úloha, Hanojské věže)
- Lineární rekurentní vztahy a jejich řešení, základní pojmy - (ne)lineární, (ne)homogenní; řešení (obecné, počáteční podmínky).
- Řešení hom. lin. rek vztahů pomocí charakteristické rovnice (násobné i komplexní kořeny).
- Řešení nehom. lin. rekurentních vztahů se speciální pravou stranou, příklad.

Vytvořující funkce

- obyčejné/exponenciální vytvořující fce, vytv. fce vybraných číselných posloupností, operace s vytv. fcemi (lin. kombinace, derivace, integrál, ...); poznámka – exponenciální vytvořující fce;
- aplikace na řešení rekurentních vztahů a jejich soustav, příklad.

2. blok prezenční výuky (so 21. 3. 2020, 8:50-14:05; G4-mat) - dle opatření rektora TUL a děkana FP TUL nahrazena prezenční forma distační

Věžové polynomy - viz doporučená literatura: kap. 4.2. Věžové polynomy

- definice pojmů - šachovnice, zakázaná políčka; $r_k(C)$, $r(x; C)$, pravidla, aplikace principu IE (výpočet přes zakázaná políčka).

Symetrická grupa - viz doporučená literatura: kap. 5.1. Permutace,symetrická grupa

- permutace jako 1-1 zobr., dvouřádkový zápis, násobení perm. (asoc., nekom., id, inverze) → S_n jako grupa
- cyklus, každá permutace jako součin disjunktních cyklů, počítaní s cykly;
  dihedrální grupa D_n = grupa 3D symetrií pravidelného n-úhelníka (grupy D_3, D_4), Kleinova čtyřgrupa = symetrie obdélníka;

Pólyova enumerační metoda - viz doporučená literatura: kap. 5. Burnside/Pólya enumerační metoda

- permutační grupa G, popis struktury cyklů permutace ... $\text{cyc\_str}(\pi) = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, popis struktury cyklů permutační grupy = cycle index polynom $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \text{cyc\_str}(\pi)$;
- Tvrzení: Počet různých obarvení n-prvkové množiny se symetriemi danými permutační grupou G pomocí nejvýše m barev je rovno $P_G(m, \ldots, m)$. (stejná obarvení = existuje $\pi \in G$, která převádí jedno obarvení na druhé; obarvení m barvami = pro obarvení kteréhokoliv prvku použiju libovolnou z m barev, tj. použiju nejvýše m barev, nikoliv nutně právě m).
- Tvrzení: Počet obarvení pomocí m barev $\{c_1, \ldots, c_m\}$, jestliže použiju $k_1 \times c_1, \ldots, k_m \times c_m$ barev, kde $k_1 + \cdots + k_m = n$, je rovno koeficient u ${c_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot {c_m}^{k_m}$ v rozvoji $P(c_1 + \cdots + c_m, \ldots, c_1^n + \cdots + c_m^n)$.
  Prezentace na příkladu 2/3D symetrií čtverce.

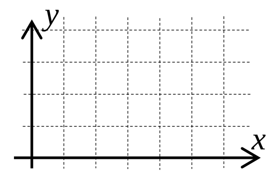
<u>**Zápočtové příklady pro ak. rok 2019/20**</u>

Elementární kombinatorika

1. Spočtěte kolika způsoby lze uspořádat různé objekty $\{a_1, \dots, a_{10}\}$ tak, že právě polovina z nich zůstává na svém místě. Dále doplňte druhý řádek následující tabulky příslušnými hodnotami odpovídajícími prvnímu řádku.

C^5_{-10}	C^6_{-6}	C^8_{-4}	C^{-7}_{-7}	C^{-8}_8	$\bar{C}^5_6$	$\bar{C}^7_6$	$\bar{C}^6_6$	$\bar{A}^4_3$	$\bar{A}^3_5$	A^4_5	A^5_4

2. Uvažujte čtvercovou síť, ve které se lze pohybovat pouze pomocí kroků typu A: [x,y]→[x+1,y] nebo B:[x,y]→[x,y+1]. Určete:
   a) Kolika různými způsoby se lze dostat z bodu [0,0] do [11,11] tak, že nepřekročíte diagonálu a neprojdete žádným z bodů [5,5] nebo [8,8].
   b) Kolika různými způsoby se lze dostat z bodu [0,0] do [12,12] tak, že nepřekročíte diagonálu a projdete bodem [5,5] a neprojdete bodem [8,8].



Binomická/multinomická věta; Newtonův vzorec

Ve všech níže uvedených případech vypočtené koeficienty zjednodušte - racionální čísla uveďte do tvaru redukovaného zlomku, iracionální čísla ponechte ve tvaru s odmocninami.

3. Uvažujte rozvoj výrazu $\left(2x - \sqrt{3y}\right)^7$. Určete koeficienty u členů:
   a) x^2y^3 b) x^3y^2 c) $x^2y^{5/2}$

4. Uvažujte rozvoj výrazu $\left(3u - \sqrt{2}v^2 + w - 5\sqrt[3]{x}\right)^6$. Určete koeficienty u členů:
   a) uv^2wx b) $uv^2w^2x^{2/3}$ c) $v^2wx^{4/3}$ d) u^2v^2wx
   Dále určete součet koeficientů u všech členů.

5. Uvažujte výraz $\sqrt[3]{5-4x^2}$. Určete koeficienty u členů: a) x^{10} b) x^{11}

Lineární rekurentní vztah/diferenční rovnice

6. Nalezněte řešení následujících rekurentních vztahů/diferenčních rovnic:
   a) $a_{n+3} + 3a_{n+2} - 4a_n = 0$, kde $a_0 = -1, a_1 = 6, a_2 = -2$.
   b) $\Delta^{(2)}a_n + 2\Delta a_n = a_n$, kde $a_1 = 5\sqrt{2}$.
   c) $2a_{n+4} - 3a_{n+3} - 3a_{n+2} + 7a_{n+1} - 3a_n = 0$, kde $a_0 = 14, a_1 = 10, a_2 = 72, a_3 = 75$.
   d) $a_{n+2} + 4a_n = 25n$, kde $a_0 = -1, a_1 = 5$. Dále spočtěte hodnoty a_{16}, a_{17}.
   (Ve výsledcích použijte pouze reálná čísla, nikoliv komplexní!)

Soustava rek. vztahů (aplikace vytvořujících funkcí)

7. Vyřešte soustavu rekurentních vztahů $a_{n+1} = -2a_n - 4b_n, b_{n+1} = 4a_n + 6b_n$, kde $a_0 = 1, b_0 = 0$.

Vytvořující funkce

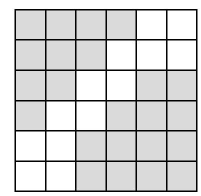
8. Určete posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou vytvořující funkcí $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{6x^3-19x^2+19x-6}$ (tj. nalezněte explicitní vyjádření a_n).

9. Určete koeficient u členu x^5 v rozvinutém tvaru vytvořující funkce $f(x) = \frac{x^3-2x}{\sqrt{9-4x^2}}$.

10. Nalezněte uzavřený tvar vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = {2^{-n}}/{(n+1)}$.

Věžové polynomy

11. Sestavte věžový polynom pro následující šachovnici.



Rozklady (diofantická rovnice, Stirlingova čísla)

12. Určete počet celočíselných řešení diofantické rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13$, kde
$$2 < x_1 \leq 7, -1 \leq x_2 < 6, -3 < x_3, 0 < x_4 \leq 6, -1 < x_5.$$

13. Spočtěte, kolika různými způsoby lze rozdělit 24 nerozlišitelných předmětů mezi 3 různé ženy a 3 různé muže, jestliže musí současně platit: a) ženy dostanou dohromady dvakrát více předmětů než muži; b) každá osoba dostane alespoň 1 a nejvýše 6 předmětů.

14. Určete, kolika různými způsoby lze rozsadit deset různých osob ke čtyřem nerozlišitelným stolům (u každého stolu sedí alespoň jedna osoba), jestliže:
a) Nezáleží na vzájemné pozici osob u stolu (tj. záleží pouze na tom, které osoby spolu sedí u jednoho stolu, lhostejno u kterého).
b) Záleží na vzájemné pozici osob u stolu (tj. dvě rozsazení považujeme za různá, jestliže alespoň jedna osoba má u stolu různé sousedy).

Pólyaova enumerační metoda

15. Uvažujte pravidelný pětiúhelník. Určete, kolika různými způsoby lze obarvit jeho hrany, pomocí 5 barev, jestliže uvažujeme: a) 2D symetrie, b) 3D symetrie.

(obarvení pomocí *n* barev = pro obarvení libovolného prvku obarvovaného objektu máme k dispozici kteroukoliv z *n* barev a to bez ohledu na již použité barvy)