

<u>Název předmětu:</u>	Úvod do diskrétní matematiky	
<u>Zkratka předmětu:</u>	KAP/UDMK	
<u>Počet kreditů:</u>	4	<u>Forma studia:</u> kombinovaná
<u>Způsob ukončení:</u>	klasifikovaný zápočet	

Anotace:

Předmět je úvodem do klasické kombinatoriky a teorie grafů.

Doporučená literatura:

Koucký M.: Kombinatorické metody I. Elektronické skriptum TUL, Liberec 2017
(https://kap.fp.tul.cz/attachments/article/284/KME_1.pdf)

Garant a přednášející: doc. RNDr. Miroslav Koucký, CSc.

Podmínky udělení klasifikovaného zápočtu

1. Odevzdat vyučujícímu správně vyřešené (a řádně okomentované) zadané úlohy alespoň 2 pracovní dny před ústní rozpravou. Vyřešené úlohy lze poslat mailem na adresu miroslav.koucky@tul.cz v některém z následujících formátů: DOC, DOCX, RTF, PDF (celková velikost max. 4 MB).
2. Úspěšné absolvování ústní rozpravy. Účast u rozpravy je podmíněna splněním bodu 1. Během ústní rozpravy student obhájí své řešení. Rozprava je úspěšná pouze v případě, že student prokáže elementární znalost a porozumění použitým pojmům a metodám. Během ústní rozpravy je možné využít své zápisky.
3. Student získá klasifikovaný zápočet pouze v případě, že úspěšně splní veškeré výše uvedené podmínky (body 1. a 2.) a to nejpozději do posledního termínu pro plnění studijních povinností akademického roku 2018/19 (viz příslušný harmonogram ak. roku 2018/19). V tomto případě se klasifikace odvíjí od úrovně formálního zpracování odevzdaného řešení zadaných úloh, odborné úrovně odevzdaného řešení zadaných úloh a od průběhu ústní rozpravy.

Předpokládané znalosti

- Tvary komplexních čísel, počítání s komplexními čísly, Laplace-Moivreův vzorec.
- Posloupnost, operace s posloupnostmi (součet, vynásobení skalárem, konvoluce). Množina všech posloupností jako vektorový prostor (lineární kombinace, lineární (ne)závislost, dimenze).
- Funkce, derivace, integrál.

Obsah samostudia

Úvod do klasické kombinatoriky

- neuspořádaná n -tice $\{a_1, \dots, a_n\}$, uspořádaná n -tice (a_1, \dots, a_n) , kartézský součin; funkce dolní/horní celá část;
- pravidlo součtu, součinu, Dirichletův princip, princip inkluze a exkluze (IE);
- variace bez opakování A_n^k , s opakováním \bar{A}_n^k ; permutace bez opakování P_n , s opakováním P_{n_1, \dots, n_k} ;
- kombinace bez opakování C_n^k , základní vlastnosti. Pascalův $\Delta \rightarrow$ zobecněný Pascalův Δ a zobecněný binomický koeficient;
- kombinace s opakováním \bar{C}_n^k
- Binomická a multinomická věta, Newtonův vzorec.

Kombinatorika s omezujícími podmínkami

- Subfaktoriály, odvození, vlastnosti.
- Catalanova čísla $C_n, n \in \mathbb{N}$ (různé způsoby odvození: počet cest z $[0,0]$ do $[n,n]$, které nepřekročí diagonálu, počet permutací realizovatelných pomocí zásobníku; počet různých způsobů uzávorkování $x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n$);
Odvození rekurentního vztahu a vytvářející funkce.
- Fibonacciho posloupnost, rek. i explicitní vztah, vytvářející funkce, základní vlastnosti.

Úvod do problematiky rozkladů

- pojmy rozklad množiny, varianty (ne/rozlišitelné objekty, ne/rozlišitelné třídy)
- n nerozlišitelných objektů do k rozlišitelných skupin (obecná omezení počtu prvků ve skupinách $a_i \leq x_i \leq b_i$) = počet řešení diofantické rovnice $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n, a_i \leq x_i \leq b_i \rightarrow$ vytvářející funkce;
- n nerozlišitelných objektů do nerozlišitelných skupin = rozklady přirozeného čísla n na kladné sčítance = počet řešení diofantické rovnice $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = n$; další varianty: předepsané sčítance a_1, \dots, a_k ;
- Stirling subset number (2. druhu) $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ = počet rozkladů n -prvkové množiny na k podmnožin (tj. ekvivalence na n -prvkové množině mající právě k tříd), vlastnosti (hodnoty, rekurence); trojúhelník pro $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$;
- Stirling cycle number (1. druhu) $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$, definice, vlastnosti (hodnoty, rekurence); trojúhelník pro $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$;

Obsah prezenční části výuky

1. blok prezenční výuky (1. 3. 2019, 8:50-14:05; G4-MAT)

Posloupnosti

- definice, operace sčítání, násobení skalárem, konvoluce;
- difference posloupnosti $(\Delta a_n = a_{n+1} - a_n; \Delta^{(k)} a_n = \Delta(\Delta^{(k-1)} a_n))$

Rekurentní vztahy a jejich řešení

- motivace (Fibonacciho úloha, Hanojské věže)
- Lineární rekurentní vztahy a jejich řešení, základní pojmy - (ne)lineární, (ne)homogenní; řešení (obecné, počáteční podmínky).
- Řešení hom. lin. rek vztahů pomocí charakteristické rovnice (násobné i komplexní kořeny).
- Řešení nehom. lin. rekurentních vztahů se speciální pravou stranou, příklad.

Vytvořující funkce

- obyčejné/exponenciální vytvořující fce, vytv. fce vybraných číselných posloupností, operace s vytv. fcemi (lin. kombinace, derivace, integrál, ...); poznámka – exponenciální vytvořující fce;
- aplikace na řešení rekurentních vztahů a jejich soustav, příklad.

2. blok prezenční výuky (22. 3. 2019, 8:50-14:05; G308.a)

- Věžové polynomy (definice pojmů - šachovnice, zakázaná políčka; $r_k(C)$, $r(x; C)$), pravidla, aplikace principu IE (výpočet přes zakázaná políčka).

Symetrická grupa

- permutace jako 1-1 zobr., dvouřádkový zápis, násobení perm. (asoc., nekom., id, inverze) $\rightarrow S_n$ jako grupa
- cyklus, každá permutace jako součin disjunktních cyklů, počítání s cykly; dihedralní grupa D_n = grupa 3D symetrií pravidelného n -úhelníka (grupy D_3, D_4), Kleinova čtyřgrupa = symetrie obdélníka;

Pólyova enumerační metoda

- motivace \rightarrow izomery (pentan \rightarrow n-pentam isopentan, neopentan), obarvení vrcholů pravidelného čtyřstěnu, čtverce nejvýše 2 barvami;
- připomenutí - permutací (součin, permutace jako součin disjunktních cyklů, inverzní permutace, symetrická a permutační grupa);
- permutační grupa G , popis struktury cyklů permutace ... $\text{cyc_str}(\pi) = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$, popis struktury cyklů permutační grupy = cycle index polynom $P_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \text{cyc_str}(\pi)$;
- Tvzení: Počet různých obarvení n -prvkové množiny se symetriemi danými permutační grupou G pomocí nejvýše m barev je rovno $P_G(m, \dots, m)$.
(stejná obarvení = existuje $\pi \in G$, která převádí jedno obarvení na druhé; obarvení m barvami = pro obarvení kteréhokoliv prvku použiju libovolnou z m barev, tj. použiju nejvýše m barev, nikoliv nutně právě m).
- Tvzení: Počet obarvení pomocí m barev $\{c_1, \dots, c_m\}$, jestliže použiju $k_1 \times c_1, \dots, k_m \times c_m$ barev, kde $k_1 + \dots + k_m = n$, je rovno koeficient u $c_1^{k_1} \cdot \dots \cdot c_m^{k_m}$ v rozvoji $P(c_1 + \dots + c_m, \dots, c_1^n + \dots + c_m^n)$.
Prezentace na příkladu 2/3D symetrií čtverce.

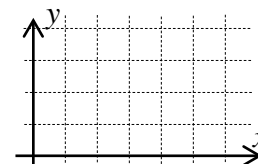
Zápočtové příklady

Elementární kombinatorika

- Spočítejte kolika způsoby lze uspořádat různé objekty $\{a_1, \dots, a_{10}\}$ tak, že právě polovina z nich zůstává na svém místě. Dále doplňte druhý řádek následující tabulky příslušnými hodnotami odpovídajícími prvnímu řádku.

C_{-10}^5	C_{-6}^6	C_{-4}^8	C_{-7}^{-7}	C_8^{-8}	\bar{C}_6^5	\bar{C}_6^7	\bar{C}_6^6	\bar{A}_3^4	\bar{A}_5^3	A_5^4	A_4^5

- Uvažujte čtvercovou síť, ve které se lze pohybovat pouze pomocí kroků typu A: $[x,y] \rightarrow [x+1,y]$ nebo B: $[x,y] \rightarrow [x,y+1]$. Určete:
 - Kolika různými způsoby se lze dostat z bodu $[0,0]$ do $[11,11]$ tak, že nepřekročíte diagonálu a neprojdete žádným z bodů $[5,5]$ nebo $[8,8]$.
 - Kolika různými způsoby se lze dostat z bodu $[0,0]$ do $[12,12]$ tak, že nepřekročíte diagonálu a projdete bodem $[5,5]$ a neprojdete bodem $[8,8]$.



Binomická/multinomická věta; Newtonův vzorec

- Uvažujte rozvoj výrazu $(2x - \sqrt{3y})^7$. Určete koeficienty u členů:
 - x^2y^3
 - x^3y^2
 - $x^2y^{5/2}$
- Uvažujte rozvoj výrazu $(3u - \sqrt{2}v^2 + w - 5\sqrt[3]{x})^6$. Určete koeficienty u členů:
 - uv^2wx
 - $uv^2w^2x^{2/3}$
 - $v^2wx^{4/3}$
 - u^2v^2wx
 Dále určete součet koeficientů u všech členů.
- Uvažujte výraz $\sqrt[3]{5 - 4x^2}$. Určete koeficienty u členů: a) x^{10} b) x^{11}

Ve všech výše uvedených případech vypočtené koeficienty zjednodušte - racionální čísla uveďte do tvaru redukovaného zlomku, iracionální čísla ponechte ve tvaru s odmocninami.

Lineární rekurentní vztah/diferenční rovnice

- Nalezněte řešení následujících rekurentních vztahů/diferenčních rovnic:
 - $a_{n+3} + 3a_{n+2} - 4a_n = 0$, kde $a_0 = -1, a_1 = 6, a_2 = -2$.
 - $\Delta^{(2)}a_n + 2\Delta a_n = a_n$, kde $a_1 = 5\sqrt{2}$.
 - $2a_{n+4} - 3a_{n+3} - 3a_{n+2} + 7a_{n+1} - 3a_n = 0$, kde $a_0 = 14, a_1 = 10, a_2 = 72, a_3 = 75$.
 - $a_{n+2} + 4a_n = 25n$, kde $a_0 = -1, a_1 = 5$. Dále spočítejte hodnoty a_{16}, a_{17} .
(Ve výsledcích použijte pouze reálná čísla, nikoliv komplexní!)

Soustava rek. vztahů (aplikace vytvářejících funkcí)

- Vyřešte soustavu rekurentních vztahů $a_{n+1} = -2a_n - 4b_n, b_{n+1} = 4a_n + 6b_n$, kde $a_0 = 1, b_0 = 0$.

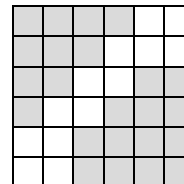
Vytvářející funkce

- Určete posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou vytvářející funkcí $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{6x^3 - 19x^2 + 19x - 6}$ (tj. najděte explicitní vyjádření a_n).

- Určete koeficient u členu x^5 v rozvinutém tvaru vytvořující funkce $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{9 - 4x^2}}$.
- Nalezněte uzavřený tvar vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = 2^{-n} / (n + 1)$.

Věžové polynomy

- Sestavte věžový polynom pro následující šachovnici.



Rozklady (diofantická rovnice, Stirlingova čísla)

- Určete počet celočíselných řešení diofantické rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13$, kde $2 < x_1 \leq 7, -1 \leq x_2 < 6, -3 < x_3, 0 < x_4 \leq 6, -1 < x_5$.
- Spočtěte, kolika různými způsoby lze rozdělit 24 nerozlišitelných předmětů mezi 3 různé ženy a 3 různé muže, jestliže musí současně platit: a) ženy dostanou dohromady dvakrát více předmětů než muži; b) každá osoba dostane alespoň 1 a nejvýše 6 předmětů.
- Určete, kolika různými způsoby lze rozsadit deset různých osob ke čtyřem nerozlišitelným stolům (u každého stolu sedí alespoň jedna osoba), jestliže:
 - Nezáleží na vzájemné pozici osob u stolu (tj. záleží pouze na tom, které osoby spolu sedí u jednoho stolu, lhostejno u kterého).
 - Záleží na vzájemné pozici osob u stolu (tj. dvě rozsazení považujeme za různá, jestliže alespoň jedna osoba má u stolu různé sousedy).

Pólyaova enumerační metoda

- Uvažujte pravidelný pětiúhelník. Určete, kolika různými způsoby lze obarvit jeho hrany, pomocí 5 barev, jestliže uvažujeme: a) 2D symetrie, b) 3D symetrie.

(obarvení pomocí n barev = pro obarvení libovolného prvku obarvovaného objektu máme k dispozici kteroukoliv z n barev a to bez ohledu na již použité barvy)