Fakulta přírodovědně humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci

Kombinatorické metody I.

Doc. RNDr. Miroslav Koucký, CSc.

Liberec, 2016

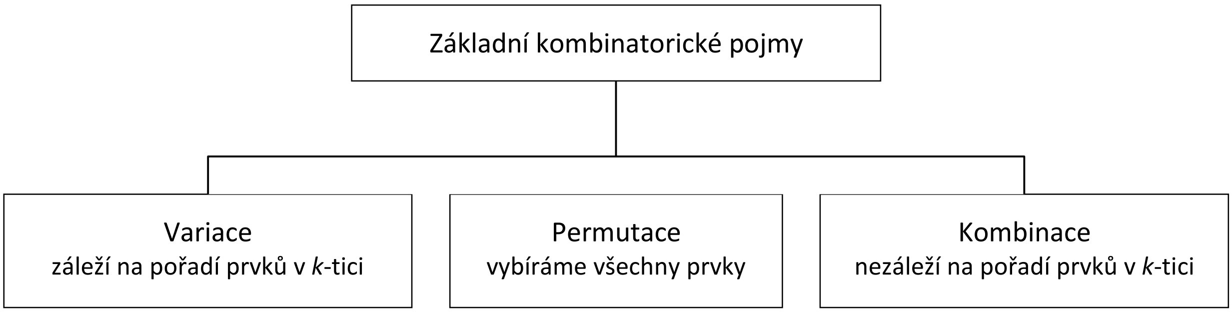
Obsah

Předmluva

Skripta Kombinatorické metody I. jsou úvodem do elementárního kombinatorického počítání a seznamují čtenáře se základními myšlenkami a pojmy z oblasti klasické kombinatoriky. Na tato skripta navazují skripta Kombinatorické metody II., která se věnují dalším tématům, zejména problematice rozkladů, vytvořujícím funkcím, rekurentním vztahům a jejich aplikacím v oblasti kombinatoriky.

1. Elementární kombinatorika

Systematický rozvoj kombinatoriky lze datovat do 17. století a je spojen se jmény Blaise Pascal, Pierre Fermat, Christian Huygens a Jacob Bernoulli. Hlavní pozornost se soustředila především na řešení různých otázek spojených s problematikou hazardních her, loterií apod. V tomto kontextu lze nejjednodušší úlohu kombinatoriky formulovat následovně - kolika různými způsoby je možné z n objektů vybrat k-tici (tj. k objektů). V závislosti na podmínkách, které definují „různé způsoby výběru“, se dostáváme k následujícím základním kombinatorickým pojmům - variace, permutace a kombinace. První představu o obsahu těchto pojmů si lze udělat z následujícího schématu.



1.1. Základní pravidla kombinatoriky

Při řešení kombinatorických úloh velmi rychle zjistíme, že většina z nich má tu nepříjemnou vlastnost, že nemůže být řešena „metodou hrubé síly“, kdy hledáme řešení výčtem, resp. vyzkoušením všech možností. Ukazuje se, že tento přístup k řešení kombinatorických úloh je i mimo možnosti současné výpočetní techniky. Z těchto důvodů jsou potřebná základní kombinatorická pravidla a metody, jejichž vhodnou aplikací lze vyřešit většinu běžných, někdy i netriviálních, kombinatorických úloh. Jde především o pravidlo součtu, pravidlo součinu, Dirichletův princip a princip inkluze a exkluze.

Pravidlo součtu

Nechť množina $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ obsahuje *m* různých prvků a množina $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ obsahuje *n* různých prvků, navíc $A \cap B = \emptyset$. Potom jeden prvek z množiny $A \cup B$ lze vybrat $m + n$ různými způsoby.

Důkaz.

Vzhledem k předpokladu $A \cap B = \emptyset$, je pravidlo součtu ekvivalentní s tvrzením $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Pravidlo součinu

Nechť množina $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ obsahuje *m* různých prvků a množina $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ obsahuje *n* různých prvků. Potom uspořádanou dvojici prvků (a_i, b_j), kde $a_i \in A, b_j \in B$ lze vybrat $m \cdot n$ různými způsoby.

Důkaz.

Pravidlo součinu je ekvivalentní se zřejmým tvrzením $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, kde symbol $\times$ označuje kartézský součin. Schematicky lze toto pravidlo znázornit maticí

$$A \times B = \left\{ \begin{matrix} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \cdots & (a_1, b_n) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \cdots & (a_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (a_m, b_1) & (a_m, b_2) & \cdots & (a_m, b_n) \end{matrix} \right\},$$

která obsahuje (právě jednou) všechny uspořádané dvojice $(a_i, b_j), i = 1, \dots m, j = 1, \dots n$.

Poznámky

- Pravidlo součtu lze snadno zobecnit na případ více množin. Jsou-li $A_1, \dots, A_n$ po dvou disjunktní množiny (tj. $\forall i \neq j \; A_i \cap A_j = \emptyset$), dostáváme
$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$
V případě, kdy není splněna podmínka disjunktnosti po dvou, pravidlo součtu nelze aplikovat a je třeba použít princip inkluze a exkluze (viz poznámka dále).
- Pravidlo součinu lze také snadno zobecnit na případ více množin. Dostáváme tak
$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

Princip inkluze a exkluze (princip IE)

Označme N celkový počet objektů, které mohou mít některé z vlastností $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Označme dále $N\left(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}\right)$ počet všech objektů z celkového počtu N, které mají vlastnosti uvedené v závorce, tj. $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ (a to bez ohledu na to, zda mají některé další vlastnosti). Potom pro počet $N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ objektů, které nemají žádnou z uvedených vlastností $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ platí

$$N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = N - \left[\sum_{i=1}^{n} N(\alpha_i)\right] + \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}\right)\right] - \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}\right)\right] + \dots + (-1)^k \left[\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} N\left(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}\right)\right] + \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Důkaz.

Matematickou indukcí dle dle počtu vlastností, tj. dle n.

Pro $n = 1$ má princip IE triviálně platný tvar $N(\bar{\alpha}_1) = N - N(\alpha_1)$.

Předpokládejme nyní jeho platnost pro libovolnou skupinu předmětů a $(n-1)$ vlastností, tj.

$$N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}) = N - \left[\sum_{i=1}^{n-1} N(\alpha_i)\right] + \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n-1} N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}\right)\right] + \dots + (-1)^k \left[\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n-1} N\left(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}\right)\right] + \dots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$$

Aplikací tohoto předpokladu na skupinu předmětů majících vlastnost a_n dostáváme

$$N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}, \alpha_n) = N(\alpha_n) - \left[\sum_{i=1}^{n-1} N(\alpha_i, \alpha_n)\right] + \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n-1} N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_n\right)\right] + \dots + (-1)^k \left[\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n-1} N\left(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}, \alpha_n\right)\right] + \dots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$$

Dále zřejmě platí
$$N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}) - N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}, \alpha_n),$$
po dosazení výše uvedených vztahů a elementární úpravě dostáváme dokazované tvrzení.

Poznámky

- Množinově bývá princip IE zapisován ve tvaru
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \left[\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2}\right|\right] + \dots + (-1)^{k+1} \left[\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \left|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\right|\right] + \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$
- Speciálně v případě $n = 2$ dostáváme
$$N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_2), \text{ resp. } |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$
V případě $n = 3$ dostáváme
$$N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_3) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$
resp. $|A_1 \cup A_2 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.
(případy $n = 2{,}3$ lze přehledně znázornit Vennovými diagramy).

Dirichletův princip (P. G. L. Dirichlet, 1805 – 1859)
Při libovolném rozmístění n objektů do k přihrádek obsahuje alespoň jedna z nich nejméně $\lceil n/k \rceil$ objektů.
Důkaz.
Sporem. Předpokládejme, že každá přihrádka obsahuje nejvýše $\lceil n/k \rceil - 1$ objektů. Z definice $\lceil x \rceil$ dostáváme $n \leq k(\lceil n/k \rceil - 1) < k(n/k) = n$. Spor - alespoň jedna přihrádka obsahuje alespoň $\lceil n/k \rceil$ objektů.

Příklad
Určete minimální počet obyvatel města, jestliže víte, že alespoň 15 lidí má ve stejný den a měsíc narozeniny (k roku nepřihlížíme a předpokládáme 365 dní v roce).
Řešení.
Dny v roce reprezentují „přihrádky“, tj. $k = 365$. V alespoň jedné má být 15 objektů (osob se stejným datem narození). Z Dirichletova principu plyne, že hledáme nejmenší přirozené n takové, aby $\left\lceil {}^{n}/_{365} \right\rceil \geq 15$. Odtud $n = 5\,111$.

1.2. Variace, permutace, kombinace

Nyní se vrátíme k exaktnějšímu vymezení základních kombinatorických pojmů - variace, permutace a kombinace. Připomeňme, že pro $n \in N$ označujeme součin $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ symbolem $n!$ (čteme n faktoriál), kde definujeme $0! = 1$.

Definice - variace bez opakování
Označme M množinu obsahující n různých prvků. Variací k-té třídy z n prvků (resp. na n-prvkové množině M) nazýváme každou uspořádanou k-tici navzájem různých prvků množiny M. Počet všech variací k-té třídy z n prvků označíme A_n^k.

Stručně lze variace bez opakování charakterizovat jako uspořádané k-tice (tj. záleží na pořadí prvků ve vybrané k-tici), ve které se jednotlivé prvky nesmí opakovat. Dvě variace (bez opakování) považujeme tedy za různé, pokud liší na alespoň jedné pozici.

Tvrzení
Pro libovolné $k, n \in N, k \leq n$ platí
$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
Důkaz.
Počty prvků, které jsou na „výběr“ při obsazování jednotlivých pozic ve variaci (bez opakování), jsou zřejmě dány následující tabulkou:

1. pozice	2. pozice	…	k-tá pozice
n	$n-1$	…	$n-k+1$

Dle pravidla součinu tak dostáváme platnost tvrzení.

Definice - variace s opakováním
Označme M množinu obsahující n různých prvků (každý druh je k dispozici v neomezeném počtu). Variací k-té třídy z n prvků s opakováním nazýváme každou uspořádanou k-tici prvků vytvořenou z libovolných druhů prvků množiny M. Počet všech variací k-té třídy z n prvků s opakováním označíme $\bar{A}_n^k$.

Stručně lze variace s opakováním charakterizovat jako uspořádané k-tice, ve které se jednotlivé druhy prvků mohou opakovat. Dvě variace s opakováním považujeme za různé, pokud se liší na alespoň jedné pozici.

Tvrzení
Pro libovolné přirozené k a n platí
$$\bar{A}_n^k = n^k.$$
Důkaz.
Počty prvků, kterými lze obsadit jednotlivé pozice ve variaci s opakováním, jsou zřejmě dány následující tabulkou (druhy se mohou opakovat!)

1. pozice	2. pozice	…	k-tá pozice
n	n		n

Dle pravidla součinu tak dostáváme platnost tvrzení.

Poznámky
Variace k-té třídy z n prvků lze definovat pomocí pojmu zobrazení. Označme $K = \{1,2,\dots,k\}$ a $A = \{a_1,\dots,a_n\}$ množinu obsahující n různých prvků.
- Variace k-té třídy z n prvků bez opakování ($k \le n$) odpovídají všem prostým zobrazením K do A.
- Variace k-té třídy z n prvků s opakováním odpovídají všem zobrazením K do A.

Příklad
Určete počet všech podmnožin libovolné n prvkové množiny A.
Řešení.
Označme $A = \{a_1,\dots,a_n\}$. Každé podmnožině $B \subseteq A$ lze přiřadit uspořádanou n-tici $(x_1,\dots,x_n)$, nazývanou charakteristický vektor podmnožiny B tak, že
$$x_i = \begin{cases} 1, & a_i \in B \\ 0, & a_i \notin B \end{cases}.$$
Podmnožinám tedy jednoznačně odpovídají výše uvedené variace n-té třídy s opakováním ze dvou prvků 0, 1. Naopak, každá taková variace jednoznačně definuje jistou podmnožinu množiny A, proto počet všech podmnožin n-prvkové množiny je roven počtu variací n-té třídy ze dvou prvků s opakováním, tj. $\bar{A}_2^n = 2^n$.

Poznámka
Systém všech podmnožin množiny A se běžně označuje některým z následujících symbolů $P(A), 2^A$ a nazývá se potenční množina množiny A. Jak plyne z výše uvedeného příkladu, pro konečnou množinu A platí
$$|P(A)| = 2^{|A|}.$$
Uveďme např., že $P(\emptyset) = \emptyset, P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}, P(\{\emptyset,\{\emptyset\}\}) = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$.

Definice - permutace bez opakování
Označme M množinu obsahující n různých prvků. Permutací řádu n (resp. na množině M) nazveme libovolnou uspořádanou n-ti vytvořenou z prvků množiny M. Počet všech permutací řádu n označíme $P(n)$, resp. P_n.

Poznámky
- Permutace řádu n (bez opakování) jsou speciálním případem variací bez opakování, totiž variace n-té třídy z n prvků, tj. $P(n) = A_n^n$.
- Permutace na množině M odpovídají všem vzájemně jednoznačným zobrazením množiny M na sebe (tzv. bijektivní zobrazení, tj. prostá a na).

- Platí následující rekurentní vztahy
  - $P(n) = n \cdot P(n-1)$, kde $P(0) = 1$,
  - $P(n) = (n-1) \cdot \big(P(n-1) + P(n-2)\big)$, kde $P(0) = 1, P(1) = 1$.

  S prvním z výše uvedených vztahů se ještě setkáme v celé řadě souvislostí. V této chvíli uveďme jeho možnou kombinatorickou interpretaci. Množinu všech permutací na $\{a_1, \dots, a_n\}$ rozložíme do n tříd $A_1, \dots, A_n$ tak, že A_i obsahuje právě všechny permutace, které mají na první pozici a_i. Snadno zjistíme, že takto definované třídy tvoří rozklad A (tj. jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocení obsahuje všechny uvažované permutace) a navíc ze zřejmých důvodů mají stejný počet prvků, tj. $\forall i, j\ |A_i| = |A_j|$. Z definice jednotlivých tříd pak vyplývá, že $|A_i| = P(n-1)$, tedy $P(n) = \sum_{i=1}^{n} |A_i| = nP(n-1)$.

Tvrzení
Pro libovolné $n \in N$ platí
$$P(n) = n!$$
kde definujeme $0! = 1$.
Důkaz.
Počet možností jak obsadit jednotlivé pozice v permutaci jsou zřejmě dány tabulkou:

1. pozice	2. pozice	…	n-tá pozice
n	$n-1$		1

Podle pravidla součinu dostáváme platnost tvrzení.

Definice - permutace s opakováním
Nechť množina M obsahuje n_1 stejných prvků 1. druhu, n_2 stejných prvků 2. druhu až n_k stejných prvků k-tého druhu. Potom každé uspořádání prvků této množiny (tj. každou uspořádanou n-tici těchto prvků, kde $n = n_1 + \dots + n_k$) nazveme permutací s opakováním řádu $(n_1, \dots, n_k)$. Počet všech permutací s opakováním řádu $(n_1, \dots, n_k)$ označíme $P(n_1, \dots, n_k)$, resp. $P_{n_1, \dots, n_k}$.

Tvrzení
Pro libovolná přirozená čísla $n_1, \dots, n_k$ platí
$$P(n_1, \dots, n_k) = \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$
Důkaz.
Označme $M = \{\underbrace{a, \dots, a}_{n_1}, \underbrace{b, \dots, b}_{n_2}, \dots, \underbrace{r, \dots, r}_{n_k}\}$, kde $n = n_1 + \dots + n_k$ množinu prvků, ze kterých budou vytvářeny permutace. Každá permutace s opakováním je zřejmě invariantní vzhledem k permutacím prvků jednotlivých druhů. Prvky i-tého druhu lze permutovat $n_i!$ způsoby, tedy dle pravidla součinu dostáváme
$$P(n_1 + \dots + n_k) = P(n_1, \dots, n_k) \cdot n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!,$$
odkud je platnost tvrzení zřejmá.

Příklad
Kolik různých slov (bez ohledu na smysl) lze sestavit při využití všech písmen slova POPOKATEPETL.
Řešení.
Evidentně jde o permutace s opakováním na množině $M = \{A, E, E, K, L, O, O, P, P, P, T, T\}$, tedy hledaný počet slov je roven $P(1,2,1,1,2,3,2) = \frac{12!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2!} = 9\,979\,200$.

Definice - kombinace bez opakování
Označme M množinu obsahující n různých prvků. Kombinací k-té třídy z n prvků (resp. na n-prvkové množině M) nazýváme každou neuspořádanou k-tici navzájem různých prvků množiny M. Počet kombinací k-té třídy z n prvků (bez opakování) budeme značit C_n^k.

Poznámky
- Dvě kombinace považujeme za různé, pokud se liší v zastoupení některého prvku (bez ohledu na jejich pozici).
- Číslo C_n^k se v závislosti na kontextu nazývá kombinační číslo, resp. binomický koeficient a označuje se také symbolem $\binom{n}{k}$, který čteme „n nad k“.

Tvrzení
Pro libovolná přirozená $k, n \in N, k \leq n$ platí

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Důkaz.
Z každé kombinace (neuspořádané k-tice) dostaneme $k!$ různých variací (uspořádané k-tice) lišící se pouze pořadím prvků, tedy $A_n^k = k! \cdot C_n^k$, odtud je platnost tvrzení zřejmá.

Tvrzení - základní vlastnosti kombinačních čísel
Pro $k, n \in N, k \leq n$ platí:

a) $C_n^k = C_n^{n-k}$, (tzv. symetrie)

b) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, (tzv. Pascalova identita)

c) $C_n^k = P(k, n-k)$,

d) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Důkaz – kombinatorický.
Označme $M = \{a_1, \dots, a_n\}$.

ad a) Každá kombinace k-té třídy z n prvků jednoznačně definuje doplňkovou kombinaci $(n-k)$-té třídy (zbylé prvky) a tedy jejich počty musí být stejné, tj. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

ad b) Množinu všech kombinací k-té třídy na M rozložíme na disjunktní množiny A_1, A_2, kde A_1 obsahuje všechny kombinace obsahující a_1, A_2 všechny ostatní. Zřejmě $C_n^k = |A_1| + |A_2|$. Pro počet kombinací v množině A_1 platí $|A_1| = C_{n-1}^{k-1}$ (kombinace obsahují prvek a_1, tj. ostatních $(k-1)$ prvků vybíráme libovolně z $(n-1)$ zbývajících prvků). Pro počet kombinací v A_2 dostáváme $|A_2| = C_{n-1}^k$ (vybíráme k prvků z $(n-1)$, neboť nesmíme použít a_1).

ad c) Každé kombinaci k-té třídy z n prvků přiřadíme charakteristický vektor, tj. uspořádanou n-tici $(x_1, \dots, x_n)$, kde $x_i = 1$, pokud a_i je v dané kombinaci, resp. $x_i = 0$, pokud a_i není v dané kombinaci. Vztah mezi kombinacemi a jejich charakteristickými vektory, je vzájemně jednoznačný, proto jsou jejich počty stejné. Charakteristické vektory jsou permutace s opakováním z k prvků prvního druhu (1) a $(n-k)$ prvků druhého druhu (0) a tudíž $C_n^k = P(k, n-k)$.

ad d) Pravá strana rovnosti udává počet variací n-té třídy ze dvou prvků, např. 0,1. Množinu všech těchto variací rozložíme do $(n+1)$ tříd $A_0, \dots, A_n$, kde A_i definujeme jako množinu všech variací obsahující právě i jedniček a $(n-i)$ nul. Zřejmě platí $|A_i| = P(i, n-i) = C_n^i$ a vzhledem k tomu, že množiny A_i jsou disjunktní po dvou, dostáváme $2^n = |A_0| + \dots + |A_n|$, což bylo třeba dokázati.

Uspořádejme nyní kombinační čísla do tzv. Pascalova trojúhelníku (schéma z následujícího obr.), jehož n-tý řádek obsahuje právě všechna kombinační čísla $C_n^k, 0 \le k \le n$.

									$0 \le k$
C_0^k	…	1							
C_1^k	…	1	1						
C_2^k	…	1	2	1					
C_3^k	…	1	3	3	1				
C_4^k	…	1	4	6	4	1			
C_5^k	…	1	5	10	10	5	1		
C_6^k	…	1	6	15	20	15	6	1	
C_7^k	…	1	7	21	35	35	21	7	1
		$0 \le n$							

Vztah části a) předchozího tvrzení lze interpretovat jako symetrii řádků (tj. k-té číslo zleva se rovná k-tému číslu zprava). Vztah b) vyjadřuje skutečnost, že každé číslo ve schématu (které není „krajní“) je součtem dvou čísel z předcházejícího řádku umístěných v daném a předcházejícím sloupci. Vztah c) udává, že součet n-tého řádku je roven 2^n.

Dále lze odhalit i kombinatoricky jinak méně evidentní zákonitosti, např. číslo z n-tého řádku a k-tého sloupce (který není „krajní“) je rovno součtu čísel na diagonále $[n-k-1,0] \to [n-1,k]$ (první číslo v dvojici určuje řádek a druhé sloupec). Platí tedy

$$C_n^k = C_{n-k-1}^0 + C_{n-k}^1 + \cdots + C_{n-1}^k.$$

Pomocí Pascalovy identity lze dodefinovat hodnoty C_n^k pro $k, n \in Z$ (tzv. rozšířený, resp. zobecněný binomický koeficient), čímž dostáváme následující schéma, které se nazývá rozšířený Pascalův trojúhelník.

C_{-7}^k	…	0	0	1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716	
C_{-6}^k	…	0	0	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	
C_{-5}^k	…	0	0	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	
C_{-4}^k	…	0	0	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	
C_{-3}^k	…	0	0	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	
C_{-2}^k	…	0	0	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	
C_{-1}^k	…	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	k
C_0^k	…	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
C_1^k	…	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	
C_2^k	…	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0	
C_3^k	…	0	0	1	3	3	1	0	0	0	0	
C_4^k	…	0	0	1	4	6	4	1	0	0	0	
C_5^k	…	0	0	1	5	10	10	5	1	0	0	
C_6^k	…	0	0	1	6	15	20	15	6	1	0	
C_7^k	…	0	0	1	7	21	35	35	21	7	1	
				n								

Definice – rozšířené binomické koeficienty

Pro libovolná přirozená čísla $k, n \in N$ definujeme hodnoty rozšířených binomických koeficientů (kombinačních čísel) následovně:

- $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$, pro $0 \leq k \leq n$,
- $C_n^k = 0$, pro $0 \leq n < k$,
- $C_{-n}^k = (-1)^k C_{n+k-1}^k$, pro $0 \leq k, 0 < n$,
- $C_n^{-k} = C_{-n}^{-k} = 0$, pro $0 < k, 0 \leq n$.

Jak uvidíme později, odpovídá tato definice vlastnostem binomických koeficientů (kombinačních čísel) v kontextu jejich širšího využití.

Definice - kombinace s opakování

Mějme k dispozici n různých druhů prvků (každý v libovolném množství). Kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním $(0 \leq k, n)$ nazveme libovolnou neuspořádanou k-tici sestavenou z prvků uvedených n druhů. Počet kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním budeme značit $\bar{C}_n^k$.

(Dvě kombinace s opakováním považujeme za různé, jestliže se liší v počtu zastoupení prvků některého druhu.)

Tvrzení

Pro libovolná $n, k \in N$ platí

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Důkaz.

Každou kombinaci k-té třídy z n prvků $\{a_1, \dots, a_n\}$ s opakováním lze jednoznačně reprezentovat bitovým řetězcem délky $(n + k - 1)$ obsahujícím $k \times 1$ a $(n - 1) \times 0$. Prvky 0 tvoří oddělovače jednotlivých druhů prvků a 1 zastupují prvky vyskytující se v kombinaci. Je zřejmé, že všem kombinacím k-té třídy z n prvků s opakováním odpovídají právě všechny permutace s opakováním z $k \times 1$ a $(n - 1) \times 0$, tj. $\bar{C}_n^k = P(k, n - 1) = C_{n+k-1}^k$.

Poznámka

Po definici pojmů variace, kombinace a permutace lze přistoupit k některým ukázkám jejich využití, např. ve statistické fyzice. Základní úlohou statistické fyziky je určit, jak se vzhledem ke svým vlastnostem rozdělují fyzikální částice. Předpokládejme, že zkoumaný systém obsahuje k částic a existuje n různých fázových stavů, ve kterých se tyto částice mohou vyskytovat. V závislosti na jejich vlastnostech dostáváme následující modely.

a) Maxwell-Boltzmannův model - nachází uplatnění v klasické fyzice (např. kinetická teorie plynů) a předpokládá, že částice jsou vzájemně rozlišitelné a každá z nich se může se stejnou pravděpodobností vyskytovat v libovolném fázovém stavu. Pro počet možných rozdělení částic tak dostáváme $\bar{A}_n^k = n^k$.

b) Bose-Einsteinův model.
Tento model nachází uplatnění např. v kvantové fyzice a předpokládá, že částice (nazývané bosony) jsou vzájemně nerozlišitelné. Rozhodující je pouze počet částic v jednotlivých fázových stavech, proto počet možných rozdělení uvažovaných částic je $\bar{C}_n^k$.

c) Fermi-Diracův model.
Tento model nachází uplatnění v atomové fyzice a lze ho považovat za Bose-Einsteinův model omezený Pauliovým vylučovacím principem. Předpokládá, že každý fázový stav může obsahovat nejvýše jednu částici (nazývanou fermion). Pro počet možných rozdělení částic tak dostáváme C_n^k.

1.3. Základní kombinatorické identity

Kombinatorické úlohy lze řešit (resp. provést důkazy kombinatorických identit) v zásadě třemi následujícími způsoby:

- Přímá metoda – spočívá ve vhodné úpravě výrazů a využití různých obecně platných vztahů. Bývá technicky velmi náročná a je rozumně využitelná pouze v jednoduchých případech.
- Kombinatorická metoda – založena na kombinatorických úvahách. Názorná, technicky velmi jednoduchá a prakticky využitelná i ve složitějších případech.
- Metody využívající vytvořující funkce, resp. rekurentní vztahy - obecné a velmi účinné metody, jednoduše využitelné i ve složitých příkladech a důkazech. Těmto metodám se budeme věnovat v navazujících skriptech.

Tvrzení

Platí

a) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$,

b) $C_{n+k}^{n+1} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{n+i}^{n}$,

c) $C_{m+n}^{k} = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}\,, k \leq \min\{m, n\}$ (Vandermondeova identita).

Důkaz.

ad a) Uvedený vztah je zřejmě ekvivalentní s tvrzením, že počet všech kombinací sudého řádu z n prvků $\{a_1, \ldots, a_n\}$ je roven počtu kombinací lichého řádu. Zvolme libovolně jeden prvek, např. a_1, a následně proveďme proceduru, při které ze všech kombinací obsahujících prvek a_1 tento prvek odebereme a naopak do kombinací, které ho původně neobsahovaly, tento prvek přidáme. Je zřejmé, že opět dostaneme všechny kombinace k-té třídy z n prvků, navíc všechny kombinace lichého řádu přejdou na kombinace sudého řádu a opačně (ve všech kombinacích změníme počet prvků o jeden).

ad b) Množinu všech kombinací $(k-1)$. třídy z $(n+2)$ prvků $\{a_1, \ldots, a_{n+2}\}$ s opakováním rozložíme do k tříd $A_0, \ldots, A_{k-1}$, kde A_i je třída obsahující všechny kombinace $(k-1)$. třídy s opakováním, ve kterých se vyskytuje prvek a_i právě i-krát. Zřejmě tak platí

$$\bar{C}_{n+2}^{k-1} = \bar{C}_{n+1}^{k-1} + \bar{C}_{n+1}^{k-2} + \cdots + \bar{C}_{n+1}^{1} + \bar{C}_{n+1}^{0}.$$

Využitím vztahu pro výpočet kombinací s opakováním pomocí kombinací bez opakování dostáváme dokazované tvrzení.

ad c) Množinu všech kombinací k-té třídy z $(m+n)$ prvků $\{a_1, \ldots, a_m\} \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$ rozložíme podle počtu prvků z množiny $\{a_1, \ldots, a_m\}$ do $(k+1)$ tříd $A_0, \ldots, A_k$, kde A_i je třída obsahující všechny kombinace, ve kterých je právě i prvků z množiny $\{a_1, \ldots, a_m\}$ a $(k-i)$ prvků z množiny $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Zřejmě platí $C_{m+n}^{k} = \sum_{i=0}^{k}|A_i|$, kde $|A_i| = C_m^i C_n^{k-i}$.

Výše uvedené identity nachází využití při řešení celé řady různých úloh. Jako příklad uvedeme vztahy pro výpočet součtů mocnin přirozených čísel.

- Ve vztahu b) položme $n = 1$. Dostáváme tak
$$C_1^1 + C_2^1 + \cdots + C_k^1 = C_{k+1}^2.$$
Odtud
$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$
(Součet lze stanovit i jednodušší úvahou, kterou použil C. F. Gauss. Návod – sčítejte vhodné dvojice čísel.)
- Pro výpočet součtu druhých mocnin využijeme opět vztah b), kde položíme $n = 2$. Dostáváme tak
$$C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{k+1}^2 = C_{k+2}^3$$
a po rozepsání

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) = \sum_{i=1}^{k} i + \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Pro součet druhých mocnin tak dostáváme

$$1^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Analogicky lze pokračovat i v případě výpočtu součtu vyšších mocnin (volíme $n = 3, \ldots$).

Tvrzení

Platí

a) $P(k_1, k_2, \ldots, k_r) = C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-k_1-\cdots-k_{r-2}}^{k_{r-1}}$.

b) $\sum_{k_1+\cdots+k_r=n} P(k_1, k_2, \ldots, k_r) = r^n$.

kde se sčítá přes všechny uspořádané r-tice $(k_1, \ldots, k_r)$ přirozených čísel, jejichž součet je roven n (tj. přes všechny rozklady čísla n na r sčítanců, na jejichž pořadí záleží).

Důkaz.

ad a) Všechny permutace s opakováním z k_1 prvků 1. druhu, k_2 prvků 2. druhu, …, k_r prvků r-tého druhu lze sestavit následovně. Nejprve vybereme k_1 míst pro prvky 1. druhu, což lze provést $C_n^{k_1}$ různými způsoby (všechny pozice jsou zatím volné). Následně vybereme k_2 míst pro prvky 2. druhu. Tato místa již vybíráme z $(n - k_1)$ volných pozic, tj. $C_{n-k_1}^{k_2}$ způsoby. Analogicky postupujeme i v případě prvků ostatních druhů. Aplikací pravidla součinu pak dostáváme dokazovaný vztah.

ad b) Pravá strana b) je zřejmě rovna počtu všech variací n-té třídy s opakováním na r prvkové množině $\{a_1, \ldots, a_r\}$. Všechny takové variace lze rozložit podle počtu prvků jednotlivých druhů do tříd. Počet tříd je zřejmě roven počtu uspořádaných r-tic přirozených čísel $(k_1, \ldots, k_r)$, kde $k_1 + \cdots + k_r = n$ a v každé takové třídě je $P(k_1, \ldots, k_r)$ variací.

1.4. Subfaktoriály, Catalanova čísla

V následující části odstavce se budeme věnovat několika kombinatorickým úlohám (úlohy s omezujícími podmínkami a rozklady), které jsou dnes považovány za klasické. Při jejich řešení budou využívány postupy, které mají obecný charakter a jsou významné pro řešení celé řady dalších úloh.

Tvrzení

a) Označme $D(n)$ počet permutací řádu n, ve kterých nezůstává žádný prvek na svém místě. Potom platí

$$D(n) = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$$

b) Označme $D_k(n)$ počet permutací řádu n, ve kterých právě k $(0 \leq k \leq n)$ prvků, zůstává na svém místě. Potom platí

$$D_k(n) = C_n^k D(n-k).$$

Důkaz.

ad a) Označme $N(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$ počet permutací, ve kterých prvky $i_1, \ldots, i_k$ zůstávají na svém místě a $N(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ počet permutací, kdy v permutaci nezůstává žádný prvek na svém místě. Aplikací principu IE dostáváme

$$D(n) = N(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n) = N - \left[\sum_{1 \leq i \leq n} N(\alpha_i)\right] + \left[\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2})\right] + \cdots$$
$$\ldots + (-1)^k \left[\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} N(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})\right] + \cdots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Pro jednotlivé počty permutací zřejmě platí:

$N = n!$ … celkový počet permutací řádu n,

$N(\alpha_i) = (n-1)!$ … počet permutací, ve kterých zůstává jeden prvek na svém místě, zbývajících $(n-1)$ prvků lze umístit libovolně,

$N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}\right) = (n-2)!$ … počet permutací, ve kterých dva prvky zůstávají na svém místě, zbývajících $(n-2)$ prvků lze umístit libovolně,

$N\left(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}\right) = (n-k)!$ … počet permutací, ve kterých k prvků zůstává na svém místě, zbývajících $(n-k)$ lze umístit libovolně,

$N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0!$ … počet permutací, kde zůstávají všechny prvky na svém místě.

Odtud

$$D(n) = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! + \cdots + C_n^k(n-k)! + \cdots + C_n^n 0!$$

a po snadné úpravě

$$D(n) = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$$

ad b) Prvky (v počtu k), které zůstávají na svém místě lze vybrat C_n^k způsoby, zbývajících $(n-k)$ prvků je možné umístit $D(n-k)$ způsoby tak, že nejsou na svém místě. Aplikací pravidla součinu pak dostáváme dokazovaný vztah.

Pozorný čtenář si jistě uvědomí, že hranatá závorka ve vztahu pro $D(n)$ obsahuje prvních $(n+1)$ členů rozvoje e^{-1}. Jelikož řada uvedená v závorce rychle konverguje, lze pro $n \geq 2$ použít k výpočtům vztah

$$D(n) = round\left(\frac{n!}{e}\right),$$

kde $round(\quad)$ je funkce zaokrouhlení.

Definice - subfaktoriály

Čísla $D(n), n \in N$ definovaná ve výše uvedeném tvrzení nazýváme subfaktoriálem (řádu n).

Jak plyne z níže uvedeného tvrzení, mají subfaktoriály $D(n)$ mnohé vlastnosti podobné faktoriálům $P(n)$.

Tvrzení

Platí:

a) $D(n) = (n-1)[D(n-1) + D(n-2)]$,

b) $D(n) = nD(n-1) + (-1)^n$,

c) $P(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D(n-k)$.

Důkaz.

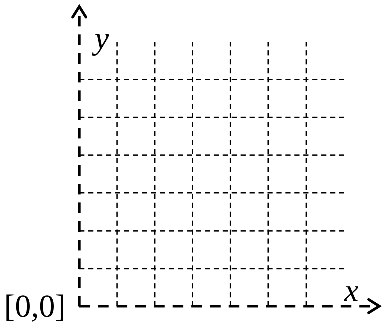
ad a) Označme A množinu všech permutací na $\{a_1, \dots, a_n\}$, ve kterých nezůstává žádný prvek na svém místě. Tuto množinu lze rozložit do $(n-1)$ tříd $A_2, \dots, A_n$, kde A_i obsahuje právě všechny permutace z A, které mají na první pozici prvek a_i. Vzhledem k tomu, že všechny třídy mají stejný počet prvků (důsledek „symetrie“), pro libovolné i platí $D(n) = (n-1)|A_i|$. Nyní stačí určit počet permutací, např. ve třídě A_2. Třídu A_2 rozložíme na dvě podmnožiny A_2^0, A_2^1, kde A_2^0 obsahuje všechny permutace z A_2, ve kterých je na druhé pozici a_1 a na zbývajících $(n-2)$ pozicích není žádný prvek na svém místě. Odtud $\left|A_2^0\right| = D(n-2)$. Podmnožina A_2^1 obsahuje všechny zbývající permutace z A_2 (na první pozici je a_2, na druhé není a_1 a na zbývajících pozicích není žádný prvek na svém místě). Odtud $\left|A_2^1\right| = D(n-1)$ a tedy platnost dokazovaného tvrzení je zřejmá.

ad b) Označme $h_n = D(n) - nD(n-1)$. Snadnou úpravou (dosazením do a)) dostáváme $h_n = (-1)h_{n-1}$, tedy $h_n = (-1)^{n-2}h_2$, kde $h_2 = D(2) - 2D(1) = 1$. Odtud $D(n) - nD(n-1) = (-1)^n$ a po snadné úpravě dostáváme dokazovaný vztah.

ad c) Množinu všech permutací řádu n lze rozložit do $(n+1)$ tříd $A_0, \dots, A_n$, kde A_i obsahuje všechny permutace, kde zůstává právě i prvků na svém místě. Odtud s ohledem na předchozí tvrzení dostáváme $P(n) = \sum_{k=0}^{n} D_k(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D(n-k)$.

Příklad

Uvažujme rovinnou síť znázorněnou na sousedním obrázku a předpokládejme, že pohyb v síti je realizován pouze pomocí dvou typů tahů $[x,y] \to [x+1,y]$ a $[x,y] \to [x,y+1]$. Spočtěte, kolik existuje různých cest z bodu $[0{,}0]$ do bodu $[m,n]$.



Řešení.

Pro potřeby důkazu označme tah $[x,y] \to [x+1,y]$ symbolem 0 a tah typu $[x,y] \to [x,y+1]$ symbolem 1. Nyní je zřejmé, že každé cestě (používající pouze tahy typu 0 a 1) lze jednoznačně přiřadit bitový řetězec délky $(m+n)$, který obsahuje právě m nul a n jedniček. Naopak, každý bitový řetězec obsahující m nul a n jedniček definuje jedinou cestu z bodu $[0{,}0]$ do bodu $[m,n]$ a proto počet uvažovaných cest je roven počtu všech permutací s opakováním, které se skládají z m nul a n jedniček, tj. $P(m,n) = C_{m+n}^m$.

Příklad

Uvažujme rovinnou síť z předcházejícího příkladu, ve které se pohybujeme pomocí stejných typů kroků, tj. $0\colon [x,y] \to [x+1,y]$ a $1\colon [x,y] \to [x,y+1]$. Spočtěte, kolik existuje různých cest z bodu $[0{,}0]$ do bodu $[n,n]$, které nepřekročí diagonálu.

(Diagonálu tvoří body $[x,y]$, pro které $x = y$, tj. nepřekročíme diagonálu, pokud pro souřadnice $[x,y]$ všech bodů cesty platí $x \geq y$).

Řešení.

Hledaný počet povolených cest (nepřekročí diagonálu a vedou z $[0{,}0]$ do $[n,n]$) označíme C_n a urči-me ho jako doplněk počtu zakázaných cest Z_n (cesta překročí diagonálu). Platí proto $C_n = C_{2n}^n - Z_n$. Počet Z_n určíme následující kombinatorickou úvahou. Označme $a_1, \dots, a_k, \dots, a_{2n}$ bitový řetězec reprezentující zakázanou cestu a k index, kde cesta prvně překročí diagonálu. V tomto okamžiku je poprvé počet jedniček v prefixu $a_1, \dots, a_k$ o jedničku větší než počet nul (číslo k je proto nutně liché). V této chvíli přidejme na začátek uvažovaného bitového řetězce 0. Tím dostáváme bitový řetězec $0, a_1, \dots, a_k, \dots, a_{2n}$, který má v prefixu $0, a_1, \dots, a_k$ stejný počet 1 i 0. Dále v uvažovaném prefixu zaměňme 0 a 1. Dostáváme tak bitový řetězec $1, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k, a_{k+1}, \dots, a_{2n}$, kde $\bar{a}_i = 0$, jestliže $a_i = 1$ a $\bar{a}_i = 1$ v ostatních případech. Tento nový bitový řetězec začíná 1, obsahuje $(n+1)$ nul a n jedniček. Snadno nahlédneme, že každé zakázané cestě lze takto jednoznačně přiřadit bitový řetězec uvedených vlastností (dvěma různým zakázaným cestám zřejmě odpovídají i různé bitové řetězce). Nyní je podstatné si uvědomit, že každý bitový řetězec $b_0, b_1, \dots, k_k, \dots, b_{2n}$ uvedených vlastností (tj. začíná 1, obsahující $(n+1)$ nul a n jedniček) definuje zakázanou cestu, kterou lze zkonstruovat následovně. Nechť k označuje pozici, kde se poprvé vyrovná počet 1 a 0 (tato situace musí nutně nastat). Nyní v prefixu $b_0, b_1, \dots, k_k$ zaměníme 0 a 1 a odstraníme úvodní 0. Získáme tak bitový řetězec $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k, b_{k+1}, \dots, b_{2n}$, který reprezentuje zakázanou cestu (poprvé překročí diagonálu na pozici k). Tím jsme také dokázali, že počet zakázaných cest je roven počtu bitových řetězců délky $(2n+1)$, které začínají 1, obsahující $(n+1)$ nul a n jedniček, tj. $Z_n = P(n-1, n+1) = C_{2n}^{n-1}$. Pro počet povolených cest tak dostáváme $C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

Definice - Catalanova posloupnost

Catalanovou posloupností budeme nazývat posloupnost $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$$

a její členy budeme nazývat Catalanovými čísly.

Poznámky

Catalanova posloupnost patří mezi prominentní kombinatorické posloupnosti a je řešením celé řady úloh.

- Snadno nahlédneme, že počet různých způsobů jak správně uzávorkovat součin $x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ je roven C_n (řádně zdůvodněte jako cvičení).
  Speciálně pro $n = 3$ dostáváme $C_3 = 5$ následujících možností uzávorkování součinu $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$:
  $\Big(\big((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2\big) \cdot x_3\Big)$ $\quad\big((x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3)\big)$ $\quad\Big(\big(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)\big) \cdot x_3\Big)$
  $\Big(x_0 \cdot \big((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3\big)\Big)$ $\quad\Big(x_0 \cdot \big(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)\big)\Big)$
- Počet permutací řádu n, které lze realizovat pomocí zásobníku (do zásobníku jsou postupně vkládána čísla $1,2,\ldots,n$ a mohou být kdykoliv vybírána), je roven C_n (řádně zdůvodněte jako cvičení).

1.5. Binomická a multinomická věta, Newtonův vzorec

Velmi důležitou „kombinatorickou identitou“ je známá binomická věta a její zobecnění ve formě multinomické věty a Newtonova vzorce.

Tvrzení - binomická a multinomická věta

a) Binomická věta - pro libovolná reálná x, y a přirozené n platí

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i}.$$

b) Multinomická věta - pro libovolná reálná $x_1, \ldots, x_r$ a přirozené n platí

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{n_1+\cdots+n_r=n} P(n_1, \ldots, n_r) \cdot x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{n_r},$$

kde součet se provádí přes všechny uspořádané r-tice přirozených čísel $(n_1, \ldots, n_r)$, jejichž součet je roven n, tj. $n_1 + \cdots + n_r = n$.

Důkaz.

ad a) Roznásobením výrazu $\underbrace{(x+y)}_{1.\ \text{člen}} \cdot \underbrace{(x+y)}_{2.\ \text{člen}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x+y)}_{n.\ \text{člen}}$ dostaneme 2^n členů obsahujících n symbolů (z každé závorky právě jeden) a tvořící zřejmě všechny variace n-té třídy s opakováním ze dvou prvků x, y. Dále je evidentní, že počet členů ve kterých se vyskytuje i-krát symbol x a $(n-i)$-krát symbol y je roven počtu permutací s opakováním řádu $(i, n-i)$. Po sloučení všech těchto členů dostáváme jako koeficient u $x^i y^{n-i}$ právě počet permutací s opakováním řádu $(i, n-i)$, tj. $P(i, n-i) = C_n^i$.

ad b) Zcela analogický k části a).
Roznásobením výrazu $\underbrace{(x_1 + \cdots + x_r)}_{1.\ \text{člen}} \cdot \underbrace{(x_1 + \cdots + x_r)}_{2.\ \text{člen}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x_1 + \cdots + x_r)}_{n.\ \text{člen}}$ dostáváme všechny variace n-té třídy s opakováním z r prvků $x_1, \ldots, x_r$. Po sloučení členů se stejnými mocninami dostáváme jako koeficient u $x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{n_r}$ počet permutací s opakováním řádu $(n_1, \ldots, n_r)$, tj. $P(n_1, \ldots, n_r)$.

Příklad

Uvažujte rozvinutý tvar výrazu $\left(2x-\frac{\sqrt{y}}{3}\right)^{10}$. Určete koeficient: i) u členu x^4y^3, ii) u členu $(xy)^5$, iii) u členu obsahujícího x^3.
Řešení.

ad i) Z binomické věty plyne, že člen obsahující x^4y^3 má tvar $C_{10}^4(2x)^4\left(-\frac{\sqrt{y}}{3}\right)^6$ a tedy hledaný koeficient je

$C_{10}^4\cdot 2^4\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)^6=\frac{1120}{243}\doteq 4{,}60905.$

ad ii) Uvedený člen se v rozvoji nevyskytuje, tedy koeficient je roven 0.

ad iii) V rozvoji daného výrazu existuje jediný člen obsahující x^3, který má tvar $x^3y^3\sqrt{y}$. Snadno tak dopočteme, že hledaný koeficient je $C_{10}^3\cdot 2^3\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)^7=-\frac{320}{729}\doteq-0{,}43896.$

Příklad

Uvažujte rozvinutý tvar výrazu $\left(5x+(2y)^2-3\sqrt{u}\right)^6$. Určete: a) koeficient u členu xy^2u^2, b) součet koeficientů u členů obsahujících y^8.

Řešení.

ad a) $P(1{,}1{,}4)\cdot 5\cdot 2^2\cdot(-3)^4=48\,600$

ad b)
$$\left.\begin{aligned}&P(2{,}4{,}0)\cdot 5^2\cdot(2^2)^4=96000\\&P(1{,}4{,}1)\cdot 5\cdot(2^2)^4\cdot(-3)=-115200\\&P(0{,}4{,}2)\cdot(2^2)^4\cdot(-3)^2=34560\end{aligned}\right\}\to 15360$$

Poznámka

Binomická a multinomická věta (jak uvidíme později, jde o vytvořující funkce) má velmi široké možnosti využití, např. jako účinný nástroj při řešení celé řady méně triviálních úloh. Pro ilustraci uvedeme důkazy vztahů z prvního tvrzení odstavce 1.3.

ad a) Dosazením $x=-1, y=1$ do binomické věty dostáváme

$$0=(-1+1)^n=\textstyle\sum_{i=0}^n C_n^i\cdot(-1)^i\cdot 1^{n-i}=\sum_{i=0}^n(-1)^iC_n^i,$$

tj. platnost dokazovaného tvrzení.

ad c) Aplikací binomické věty na zřejmou identitu $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$ dostáváme

$$\textstyle\sum_{i=0}^{m+n}C_{m+n}^i\cdot x^i=\left(\sum_{i=0}^m C_m^i\cdot x^i\right)\left(\sum_{j=0}^n C_n^j\cdot x^j\right).$$

Porovnáním koeficientů u x^k na obou stranách dostáváme $C_{m+n}^k=\sum_{i=0}^k C_m^iC_n^{k-i}$, $k\le\min\{m,n\}$, což bylo třeba dokázati.

Binomická věta je speciálním případem následujícího tvrzení, které bývá označované jako Newtonův vzorec.

Tvrzení - Newtonův vzorec

Pro libovolná $x,\alpha\in R, |x|<1$ platí

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\cdots$$

Snadno ověříme, že pro α přirozené je koeficient u x^k roven právě binomickému koeficientu C_α^k (koeficienty všech členů $x^k, k>\alpha$ jsou nulové, tudíž dostáváme binomickou větu). V případě, kdy exponent je záporné celé číslo, budeme psát $-n$, kde $n\in N^+$ a (1.27) má tvar

$$(1+x)^{-n} = 1 - C_n^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \cdots + (-1)^k C_{n+k-1}^k x^k + \cdots$$

Koeficient u x^k je tedy roven C_{-n}^k, což plně odpovídá již dříve uvedené definici rozšířených binomických koeficientů.

Příklad

Uvažujte rozvoj výrazu $\sqrt[3]{(5-4x^3)^2}$. Určete: a) koeficient u x^{12}, b) koeficient u x^{13}.

Řešení.

Zřejmě $\sqrt[3]{(5-4x^3)^2} = 5^{2/3}\left(1-\frac{4}{5}x^3\right)^{2/3}$

ad a) Využitím Newtonova vzorce dostáváme $\left(\alpha = 2/3\right)$ pro hledaný koeficient

$$5^{2/3} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-3\right)}{4!} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^4 = -\frac{1792}{30375\sqrt[3]{5}} \doteq -0{,}0345$$

ad b) Uvedený člen se v rozvoji nevyskytuje, tedy koeficient je roven 0.

2. Rozklady

Základní úlohu z oblasti rozkladů lze formulovat následovně – určete počet rozkladů dané konečné množiny. V závislosti na „omezujících“ podmínkách, např. prvky množiny (alternativně označované také jako objekty) jsou (ne)rozlišitelné, třídy rozkladu považujeme za (ne)rozlišitelné, (ne)zadán počet tříd rozkladu, omezení počtu prvků v jednotlivých třídách apod., dostáváme následující základní typy rozkladových úloh.

2.1. Rozklady nerozlišitelných objektů do rozlišitelných tříd

Úloha - určete počet rozkladů množiny obsahující n nerozlišitelných objektů do rozlišitelných tříd.

Tvrzení

a) Počet rozkladů množiny obsahující n nerozlišitelných objektů do k rozlišitelných tříd, jestliže připouštíme i prázdné třídy rozkladu, je roven počtu řešení rovnice

$$x_1 + \cdots + x_k = n,$$

která vyhovují podmínkám $\forall i \; x_i \in N$.

b) Počet řešení výše uvedené rovnice je roven $P(n, k-1) = C_{n+k-1}^{k-1}$.

Důkaz.

ad a) Zřejmé, pokud x_i interpretujeme jako počet objektů v i-té třídě rozkladu.

ad b) Každý rozklad lze jednoznačně reprezentovat bitovým řetězcem délky $n + k - 1$, který obsahuje $(k-1)$ bitů nastavených na 0, které tvoří oddělovače pro k tříd rozkladu a n bitů nastavených na 1, kde každá 1 zastupuje právě jeden objekt v dané třídě rozkladu.

Další variantou této úlohy je situace, kdy předepíšeme minimální počty objektu v jednotlivých třídách. V tomto případě platí následující tvrzení.

Tvrzení

a) Počet rozkladů množiny obsahující n nerozlišitelných objektů do k rozlišitelných tříd, jestliže požadujeme, aby i-tá třída $(1 \leq i \leq k)$ rozkladu obsahovala alespoň a_i objektů, je roven počtu celočíselných řešení rovnice

$$x_1 + \cdots + x_k = n,$$

která vyhovují podmínkám $\forall i \; 0 \leq a_i \leq x_i$.

b) Počet řešení výše uvedené rovnice je roven $P\left(n - \sum_{i=1}^{k} a_i, k-1\right) = C_{n+k-1-\sum_{i=1}^{k} a_i}^{k-1}$.

Důkaz.

Analogicky k důkazu předchozího tvrzení interpretujeme $(k-1)$ nulových bitů jako oddělovače k tříd, které nejprve „naplníme“ povinným minimálním počtem objektů a_i. Následně rozdělíme zbývajících $n - \sum_{i=1}^{k} a_i$ objektů (reprezentované 1) libovolně do k tříd.

Obecnou variantou předchozích úloh je situace, kdy zadáme dolní i horní omezení počtu objektů v jednotlivých třídách rozkladu. V tomto případě hledáme počet celočíselných řešení rovnice

$$x_1 + \cdots + x_k = n,$$

která vyhovují podmínkám $\forall i \; a_i \leq x_i \leq b_i \; (a_i, b_i \in Z)$.

Poznámka

Počet celočíselných řešení výše uvedené rovnice stanovíme obvykle následovně:
Nejprve převedeme podmínky $\forall i \; a_i \leq x_i \leq b_i$ na tvar $\forall i \; 0 \leq x_i - a_i \leq b_i - a_i$.

Označíme-li nyní $y_i = x_i - a_i, c_i = b_i - a_i$ a $m = n - \sum_{i=1}^{k} a_i$, dostáváme se k ekvivalentní rovnici

$$y_1 + \cdots + y_k = m,$$

s podmínkami $\forall i \;\; 0 \le y_i \le c_i$.
Hledaný počet řešení pak stanovíme pomocí principu inkluze a exkluze, tj. dle vztahu

$$N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k) = N - \left[\sum_{i=1}^{k} N(\alpha_i)\right] + \left[\sum_{1\le i_1<i_2\le k} N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}\right)\right] - \left[\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le k} N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}\right)\right] + \dots + (-1)^k N(\alpha_1, \dots, \alpha_k),$$

kde $\alpha_i: c_i + 1 \le y_i, i = 1, \dots, k$,
$\bar{\alpha}_i: 0 \le y_i \le c_i$,
$N\left(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_j}\right), j = 1, \dots, k$ označuje počet řešení vyhovující podmínkám $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_j}$ a
$N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k)$ je počet hledaných řešení, tj. vyhovujících podmínkám $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k$.

Příklad
Nalezněte počet celočíselných řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8,$$

kde $0 \le x_1$, $-4 < x_2 < 5$, $2 \le x_3 \le 6$, $-4 \le x_4 < -1$, $0 < x_5 \le 7$.
Řešení.
Nejprve omezující podmínky transformujeme na ekvivalentní tvar s dolní mezí rovnou 0. Dostáváme

$$0 \le x_1,\ 0 \le x_2 + 3 \le 7,\ 0 \le x_3 - 2 \le 4,\ 0 \le x_4 + 4 \le 2,\ 0 \le x_5 - 1 \le 6.$$

Nyní provedeme substituci $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 + 3$, $y_3 = x_3 - 2$, $y_4 = x_4 + 4$, $y_5 = x_5 - 1$, která převede původní rovnici na tvar

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 12 \qquad (*)$$

s podmínkami $0 \le y_1$, $0 \le y_2 \le 7$, $0 \le y_3 \le 4$, $0 \le y_4 \le 2$, $0 \le y_5 \le 6$.
Pro potřeby principu inkluze a exkluze použijme následující označení (negace podmínek s definovanou horní mezí): $\alpha_1: 8 \le y_2$, $\alpha_2: 5 \le y_3$, $\alpha_3: 3 \le y_4$, $\alpha_4: 7 \le y_5$. Hledáne tedy počet řešení $N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4)$ rovnice $(*)$, která nesplňují žádnou z podmínek $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Využitím principu inkluze a exkluze dostáváme

$$N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4) = N - \sum_{i=1}^{4} N(\alpha_i) + \sum_{1\le i_1<i_2\le 4} N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_2\right) - \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le 4} N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_2, \alpha_3\right) + N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4),$$

kde N je počet všech řešení $(0 \le y_i)$,
$N(\alpha_i)$ je počet řešení vyhovující podmínce α_i, jinde $0 \le y_j$ pro $j \ne i$,
$N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}\right)$ je počet řešení vyhovující podmínám $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}$, jinde $0 \le y_j$ pro $j \ne i_1, i_2$,
$N\left(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}\right)$ je počet řešení vyhovující podmínám $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}$, jinde $0 \le y_j$ pro $j \ne i_1, i_2, i_3$,
$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ je počet řešení vyhovující podmínkám $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Pro výše uvedené snadno dostáváme (viz předchozí věta) následující hodnoty

$N = P(4{,}12) = 1820$;
$N(\alpha_1) = P(4{,}12 - 8) = 70$; $N(\alpha_2) = P(4{,}12 - 5) = 330$;
$N(\alpha_3) = P(4{,}12 - 3) = 715$; $N(\alpha_4) = P(4{,}12 - 7) = 126$;
$N(\alpha_1, \alpha_2) = N(\alpha_1, \alpha_4) = 0$; $N(\alpha_1, \alpha_3) = P(4{,}12 - 8 - 3) = 5$;
$N(\alpha_2, \alpha_3) = P(4{,}12 - 5 - 3) = 70$; $N(\alpha_2, \alpha_4) = P(4{,}12 - 5 - 7) = 1$;
$N(\alpha_3, \alpha_4) = P(4{,}12 - 3 - 7) = 15$;
$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = N(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4) = N(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0$;

Tedy pro hledaný počet řešení dostáváme $N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4) = 670$

2.2. Rozklady nerozlišitelných objektů do nerozlišitelných tříd

Úloha - určete počet rozkladů množiny obsahující n nerozlišitelných objektů do nerozlišitelných tříd.

Tvrzení

Počet rozkladů množiny obsahující n nerozlišitelných objektů do neprázdných a nerozlišitelných tříd (jejichž počet není specifikován), je roven:

a) Počtu rozkladů přirozeného čísla n na součet přirozených sčítanců.

b) Počtu řešení rovnice

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = n$$

v oboru přirozených čísel (tj. $\forall i\ x_i \in N$).

Důkaz.

ad a) Zřejmé, neboť nezáleží na pořadí sčítanců (sčítání je komutativní) a sčítanci se stejnou hodnotou jsou nerozlišitelní.

ad b) S ohledem na a) stačí označit počet sčítanců o velikosti i symbolem x_i $(0 \leq i \leq n)$.

Další variantou výše uvedené úlohy o rozkladu přirozeného čísla n na kladné sčítance je předepsání hodnot, kterých sčítanci mohou nabývat (v základní variantě to jsou hodnoty $1,2,\dots,n$).

Tvrzení

Počet rozkladů přirozeného čísla n na sčítance rovné některým z přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$, je roven počtu řešení rovnice

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = n$$

v oboru přirozených čísel (tj. $\forall i\ x_i \in N$).

Důkaz.

Analogicky předchozímu tvrzení stačí interpretovat x_i jako počet sčítanců rovných číslu a_i.

Poznámka

Je zřejmé, že přirozené číslo n nemusí být vždy rozložitelné na součet využívající pouze zadaných sčítanců $a_1, \dots, a_k$. Snadno se např. přesvědčíme, že číslo 353 nelze vyjádřit ve tvaru součtu, kde sčítance se mohou opakovat, ale mohou být rovny pouze některým z čísel 9, 12, 21, 33. Připomeňme, že kritériem řešitelnosti je v tomto případě podmínka $NSD(a_1, \dots, a_k)|n$, kde NSD označuje největšího společného dělitele.

Příklad

Určete počet způsobů, jak lze vyplatit částku $5n$ Kč pomocí mincí v hodnotě 5 Kč, 10 Kč, 20 Kč.

Řešení.

Úloha je zřejmě ekvivalentní s úlohou určit počet řešení rovnice $5x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 5n$ $(n \in N)$ v oboru přirozených čísel. Snadno zjistíme, že zadaným podmínkám vyhovují uspořádané trojice tvaru

$$(x_1, x_2, x_3) = (n - 2t - 4u, t, u),$$

kde $0 \leq n - 2t - 4u$ a $t, u \in N$. Odtud dostáváme pro hledaný počet způsobů jak rozměnit zadanou částku $5n$ Kč pomocí mincí v hodnotě 5 Kč, 10 Kč, 20 Kč vztah

$$\sum_{u=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \left(n/2 - 2u + 1 \right) = \left(\lfloor n/4 \rfloor + 1 \right)\left(n/2 - \lfloor n/4 \rfloor + 1 \right),$$

kde $\lfloor\ \ \rfloor$ označuje funkci dolní celá část. Např. částku 500 Kč lze rozměnit pomocí 5, 10, 20 Kč mincí 676 různými způsoby.

2.3. Stirlingova čísla

Další třídu rozkladových úloh tvoří problematika rozkladu množiny rozlišitelných prvků. Základní výsledky jsou obsahem tohoto odstavce a pojednávají stručně o tzv. Stirlingových číslech.

Definice – Stirlingova čísla 2. druhu
Počet, kolika způsoby lze rozložit množinu obsahující n různých prvků do k neprázdných (nerozlišitelných) tříd značíme $S(n,k)$ a nazýváme Strlingovo číslo 2. druhu řádu n,k.

Poznámky

- V kontextu rozkladů se místo pojmu Stirlingovo číslo 2. druhu běžně používá termín Stirling subset number (řádu n,k) a značí se $\left\{ n \atop k \right\}$, tj. $S(n,k) = \left\{ n \atop k \right\}$. Oba názvy i symboly budeme běžně používat jako ekvivalenty. Nicméně označení pomocí složených závorek je návodné, neboť zdůrazňuje skutečnost, že jde o třídy rozkladu, které chápeme jako množiny a tedy nezáleží na pořadí prvků v třídách rozkladu (na rozdíl od níže zavedených Stirling subset numbers).
- Pro některé hodnoty $n,k \in N$ je snadné určit $\left\{ n \atop k \right\}$ explicitně. Platí:
  $\left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1,$ $\left\{ n \atop 0 \right\} = 0$, pro $n \in N^+$, $\left\{ n \atop 1 \right\} = 1$, pro $n \in N^+$,
  $\left\{ n \atop 2 \right\} = 2^{n-1} - 1$, pro $2 \leq n$, $\left\{ n \atop n-1 \right\} = \frac{n(n-1)}{2}$, pro $n \in N^+$, $\left\{ n \atop n \right\} = 1$, pro $n \in N$.
  (řádně zdůvodněte!)

Tvrzení
Pro Stirlingova čísla 2. druhu (Stirling subset numbers) platí pro $1 \leq k \leq n$ rekurentní vztah

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\}.$$

(s počátečními podmínkami uvedenými v předchozí poznámce)
Důkaz.
Označme $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ množinu rozkládanou do k neprázdných tříd. Uvažované rozklady rozdělíme do dvou disjunktních skupin následovně – první obsahuje rozklady, kde libovolný pevně zvolený prvek, např. a_1, tvoří samostatnou třídu rozkladu a druhou zbývající rozklady (tj. rozklady, kde prvek a_1 je obsažen ve třídě rozkladu obsahující alespoň 2 prvky). Snadno zjistíme, že v první skupině existuje $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$ rozkladů (prvek a_1 tvoří samostatnou třídu rozkladu a je proto třeba rozložit $n-1$ zbývajících prvků do $k-1$ tříd). Počet rozkladů ve druhé skupině je zřejmě roven $k \left\{ n-1 \atop k \right\}$. Všechny prvky kromě a_1 (tj. celkem $n-1$ prvků) rozložíme do k tříd a následně prvek a_1 přidáme k některé z k již existujících tříd.

Definice - Bellova čísla
Počet všech rozkladů konečné n-prvkové množiny značíme $B_n, n \in N$ a nazýváme Bellovo číslo.

Poznámka

- Každý rozklad množiny jednoznačně definuje relaci ekvivalence na této množině a tedy Bellova čísla $B_n, n \in N$ lze interpretovat také jako počet relací ekvivalence na n-prvkové množině.
- Je zřejmé, že pro Bellova čísla platí $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\}$, tj. B_n je součtem n-tého řádku výše uvedeného trojúhelníka Stirlingových čísel 2. druhu.

Definice – Stirling cycle numbers

Počet, kolika způsoby lze rozložit množinu obsahující n různých prvků do k neprázdných (nerozlišitel-ných) cyklů značíme $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ a nazýváme Stirling cycle number[1] řádu n, k.

Poznámky

- Jak Stirling subset numbers $\left\{ n \atop k \right\}$, tak i Stirling cycle numbers $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ se vztahují k rozkladům n-prvkové množiny na k neprázdných nerozlišitelných tříd. Rozdíl spočívá v tom, že v případě Stirling subset numbers nezáleží na pořadí prvků v jednotlivých třídách rozkladu, kdežto v případě Stirling cycle numbers jsou prvky každé třídy rozkladu uspořádány na kružnici a tedy záleží na tom, jak jsou na kružnici uspořádaný. Pro libovolná $0 \leq k \leq n$ proto zřejmě platí $0 \leq \left\{ n \atop k \right\} \leq \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.
- Stirling cycle number $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ lze interpretovat jako počet permutací na n-prvkové množině, které lze zapsat pomocí k disjunktních cyklů, tudíž platí $\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$
- Pro některé hodnoty $n, k \in N$ je snadné určit $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ explicitně. Platí:

  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1,$ $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, pro $n \in N^+$, $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$, pro $n \in N^+$,

  $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \frac{n(n-1)}{2}$, pro $n \in N^+$, $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$, pro $n \in N$.

  (řádně zdůvodněte!)

Tvrzení

Pro Stirling cycle numbers platí pro $1 \leq k \leq n$ rekurentní vztah

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

(s počátečními podmínkami uvedenými v předchozí poznámce)

Důkaz.

Zcela analogický důkazu předchozího tvrzení, tj. spočteme počet rozkladů, kde prvek a_1 tvoří samostatný cyklus, plus počet rozkladů, kde prvek a_1 je součástí cyklu délky alespoň 2.

Definice - padající faktoriál

Nechť $x \in R, n \in N$. Potom symbolem $x^{\underline{n}}$ označujeme tzv. padající faktoriál (faktorial power, falling power) definovaný vztahem

$$x^{\underline{n}} = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n+1),$$

kde dodefinujeme $x^{\underline{0}} = 1$

Poznámky – Stirlingova čísla 1. a 2. druhu

- Je zřejmé, že padající faktoriál $x^{\underline{n}}$ je polynom stupně n a lze ho proto psát ve tvaru

  $$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \cdot x^k .$$

  Koeficienty $s(n,k)$ se nazývají Stirlingova čísla 1. druhu.

  Lze ukázat, že mezi Stirlingovými čísly 1. druhu a Stirling cycle numbers platí vztah

[1] Vzhledem k tomu, že v češtině není dosud ustálen vhodný překlad, bude dále používána anglická terminologie.

$$s(n,k) = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

- Snadno lze ukázat i „obrácené“ tvrzení, že mocninu x^n lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace padajících faktoriálů $x^{\underline{k}}, k = 0,1, \dots, n$, tj. ve tvaru

  $$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \cdot x^{\underline{k}} .$$

  Koeficienty $S(n,k)$ se nazývají Stirlingova čísla 2. druhu.
  Lze ukázat, že mezi Stirlingovými čísly 2. druhu a Stirling subset numbers platí vztah

  $$S(n,k) = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}.$$

Příklad

a) Vyjádřete $x^{\underline{7}}$ ve tvaru polynomu.

b) Vyjádřete x^7 ve tvary lineární kombinace padajících faktoriálů.

Řešení.

ad a) Z výše uvedené poznámky dostáváme

$$x^{\underline{7}} = x^7 - 21x^6 + 175x^5 - 735x^4 + 1624x^3 - 1764x^2 + 720x.$$

Správnost ověřte z definice, tj. roznásobením výrazu $x^{\underline{7}} = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$.

ad b) Vzhledem k výše uvedené poznámce dostáváme

$$x^7 = x^{\underline{7}} + 21x^{\underline{6}} + 140x^{\underline{5}} + 350x^{\underline{4}} + 301x^{\underline{3}} + 63x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

Správnost ověřte dosazením výrazů pro $x^{\underline{k}}, k = 1, \dots 7$ a následným roznásobením.

3. Přílohy

3.1. Přehled značení

$\wedge$	… logická spojka „a“ (konjunkce)
$\vee$	… logická spojka „nebo“ (disjunkce)
$\rightarrow$	… implikace (jestliže)
$\leftrightarrow$	… ekvivalence (právě když)
$\overline{}$, resp. $\neg$	… negace
N	… množina přirozených čísel $0,1,2,\dots$
N^+	… množina kladných přirozených čísel
Z	… množina celých čísel
Q	… množina racionálních čísel
R	… množina reálných čísel
C	… množina komplexních čísel
$\{a_1, \dots, a_n\}$	… neuspořádaná n-tice, tj. množina skládající se z prvků $a_1, \dots, a_n$
$(a_1, \dots, a_n)$	… uspořádaná n-tice
$\{a \vert V(a)\}$	… množina prvků s vlastností V
$A \cap B$	… průnik množin A, B
$A \cup B$	… sjednocení množin A, B
$A - B$	… rozdíl množin A, B
$\bar{A}$	… doplněk množiny A
$A \times B$	… kartézský součin množin A, B
$P(A)$	… potenční množina (systém všech podmnožin množiny A)
$\vert A\vert$	… počet prvků (mohutnost, kardinalita) množiny A
$f(a)$	… hodnota funkce f v bodě a
$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, resp. $(a_n)_{n=0}^{\infty}$	… číselná posloupnost
$\lceil x \rceil$	… horní celá část reálného čísla x
$\lfloor x \rfloor$	… dolní celá část reálného čísla x
$\{x\}$	… lomená část x
$\ln x$	… přirozený logaritmus reálného čísla x
C_n^k	… rozšířený binomický koeficient $(k, n \in Z)$, resp. počet kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování $(0 \le k \le n)$
$\bar{C}_n^k$	… počet kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním $(0 \le k, n)$
A_n^k	… počet variací k-té třídy z n prvků bez opakování $(0 \le k \le n)$
$\bar{A}_n^k$	… počet variací k-té třídy z n prvků s opakováním $(0 \le k, n)$
$P(n), P_n$	… počet permutací n-tého řádu/třídy (bez opakování)
$P(n_1, \dots, n_k), P_{n_1,\dots,n_k}$	… počet permutací s opakováním (n_1 prvků 1. druhu,…, $n_k$prvků k-tého druhu)
$D(n), D_n$	… počet permutací n-tého řádu/třídy bez opakování, ve kterých nezůstává žádný prvek na svém místě (tzv. subfaktoriál n-tého řádu/třídy)
$D_k(n), D_{n,k}$	… počet permutací n-tého řádu/třídy bez opakování, ve kterých zůstává právě k prvků na svém místě $(0 \le k \le n)$

C_n … Catalanovo číslo

3.2. Tabulka hodnot subfaktoriálů

n	D_n	n	D_n
0	1	11	14 684 570
1	0	12	176 214 841
2	1	13	2 290 792 932
3	2	14	32 071 101 049
4	9	15	481 066 515 734
5	44	16	7 697 064 251 745
6	265	17	130 850 092 279 664
7	1 854	18	2 355 301 661 033 953
8	14 833	19	44 750 731 559 645 106
9	133 496	20	895 014 631 192 902 121
10	1 334 961	21	18 795 307 255 050 944 540

3.3. Tabulka hodnot Fibonacciho čísel

n	F_n	n	F_n	n	F_n
0	0	15	610	30	832 040
1	1	16	987	31	1 346 269
2	1	17	1 597	32	2 178 309
3	2	18	2 584	33	3 524 578
4	3	19	4 181	34	5 702 887
5	5	20	6 765	35	9 227 465
6	8	21	10 946	36	14 930 352
7	13	22	17 711	37	24 157 817
8	21	23	28 657	38	39 088 169
9	34	24	46 368	39	63 245 986
10	55	25	75 025	40	102 334 155
11	89	26	121 393	41	165 580 141
12	144	27	196 418	42	267 914 296
13	233	28	317 811	43	433 494 437
14	377	29	514 229	44	701 408 733

3.4. Tabulka hodnot Catalanových čísel

n	C_n	n	C_n	n	C_n
0	1	7	429	14	2 674 440
1	1	8	1 430	15	9 694 845
2	2	9	4 862	16	35 357 670
3	5	10	16 796	17	129 644 790
4	14	11	58 786	18	447 638 700
5	42	12	208 012	19	1 767 263 190

6	132	13	742 900	20	6 564 120 420

3.5. Tabulka hodnot Stirlingových čísel 1. druhu $s(n,k)$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	-1	1								
3	0	2	-3	1							
4	0	-6	11	-6	1						
5	0	24	-50	35	-10	1					
6	0	-120	274	-225	85	-15	1				
7	0	720	-1 764	1 624	-735	175	-21	1			
8	0	-5 040	13 068	-13 132	6 769	-1 960	322	-28	1		
9	0	40 320	-109 584	118 124	-67 284	22 449	-4 536	546	-36	1	
10	0	-362 880	1 026 576	-1 172 700	723 680	-269 325	63 273	-9 450	870	-45	1

3.6. Tabulka hodnot Stirlingových čísel 2. druhu $S(n,k)$

(Stirling subset numbers $\left\{ {n \atop k} \right\}$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1 701	1 050	266	28	1		
9	0	1	255	3 025	7 770	6 951	2 646	462	36	1	
10	0	1	511	9 330	34 105	42 525	22 827	5 880	750	45	1