Název předmětu: **Úvod do diskrétní matematiky**

Zkratka předmětu: **UDME**

Počet kreditů: 4 Forma studia: kombinovaná

Způsob ukončení: **klasifikovaný zápočet**

Anotace:
Předmět je úvodem do klasické kombinatoriky a teorie grafů.

Doporučená literatura:
Koucký M.: Kombinatorické metody I. Elektronické skriptum TUL, Liberec 2017

Garant a přednášející: doc. RNDr. Miroslav Koucký, CSc.

Úvod do diskrétní matematiky – kombinovaná forma

(platnost pro ak. rok 2017/18)

Podmínky udělení klasifikovaného zápočtu

1. Odevzdat vyučujícímu správně vyřešené (a řádně okomentované) zadané úlohy alespoň 2 pracovní dny před ústní rozpravou. Vyřešené úlohy lze poslat mailem na adresu miroslav.koucky@tul.cz v některém z následujících formátů: DOC, DOCX, RTF, PDF (velikost max. 4 MB).
2. Úspěšné absolvování ústní rozpravy. Účast u rozpravy je podmíněna splněním bodu 1. Během ústní rozpravy student obhajuje své řešení. Rozprava je úspěšná pouze v případě, že student prokáže elementární znalost a porozumění použitým pojmům a metodám. Během ústní rozpravy je možné využít své zápisky.
3. Student získá klasifikovaný zápočet pouze v případě, že úspěšně splní veškeré výše uvedené podmínky (body 1. a 2.) a to nejpozději do závěrečného termínu pro plnění studijních povinností akademického roku 2017/18 (viz příslušný harmonogram ak. roku 2017/18). V tomto případě se klasifikace odvíjí od úrovně formálního zpracování odevzdaného řešení zadaných úloh, odborné úrovně řešení zadaných úloh a od průběhu ústní rozpravy.

Předpokládané znalosti

- Tvary komplexních čísel, počítání s komplexními čísly, Laplace-Moivreův vzorec.
- Posloupnost, operace s posloupnostmi (součet, vynásobení skalárem, konvoluce). Množina všech posloupností jako vektorový prostor (lineární kombinace, lineární (ne)závislost, dimenze).
- Funkce, derivace, integrál.

Obsah samostudia

Úvod do klasické kombinatoriky

- neuspořádaná *n*- tice { $a_1,\dots,a_n$ }, uspořádaná n-tice ($a_1,\dots,a_n$), kartézský součin; funkce dolní celá část $\lfloor\ \rfloor$, horní celá část $\lceil\ \rceil$;
- pravidlo součtu, součinu, Dirichletův princip, princip inkluze a exkluze (IE);
- variace bez opakování A_n^k, s opakováním $\bar{A}_n^k$; permutace bez opakování P_n, s opakováním $P_{n_1,\dots,n_k}$;
- kombinace bez opakování C_n^k, základní vlastnosti. Pascalův Δ → zobecněný Pascalův Δ a zobecněný binomický koeficient;
- kombinace s opakováním $\bar{C}_n^k$
- Binomická a multinomická věta, Newtonův vzorec.

Kombinatorika s omezujícími podmínkami

- Subfaktoriály, odvození, vlastnosti.
- Catalanova čísla $C_n, n \in N$ (různé způsoby odvození: počet cest z [0,0] do [n,n] nepřekračujících diagonálu, počet permutací realizovatelných pomocí zásobníku; počet různých způsobů uzávorkování $x_0 \cdot x_1 \cdot \cdots \cdot x_n$); Odvození rekurentního vztahu a vytvořující funkce.
- Fibonacciho posloupnost, rek. i explicitní vztah, vytvořující funkce, základní vlastnosti.

Obsah prezenční části výuky

Úvod do problematiky rozkladů

- pojmy rozklad množiny, varianty (ne/rozlišitelné objekty, ne/rozlišitelné třídy)
- nerozlišitelné objekty do rozlišitelných skupin (obecná omezeními počtu prvků ve skupinách $a_i \leq x_i \leq b_i$) počet řešení diofantické rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n, a_i \leq x_i \leq b_i$;
- nerozlišitelné objekty do nerozlišitelných skupin (rozklady přirozeného čísla na kladné sčítance; počet řešení diofantické rovnice $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = n$); další varianty - předepsané sčítance $a_1, \ldots, a_k$;
- Stirling subset number = počet rozkladů *n*-prvkové množiny na *k* podmnožin (ekvivalence na *n*-prvkové množině mající právě *k* tříd), vlastnosti (hodnoty, rekurence);
- Stirling cycle number, definice, vlastnosti (hodnoty, rekurence).

Posloupnosti

- definice, operace sčítání, násobení skalárem, konvoluce; diference posloupnosti.

Lineární rekurentní vztahy a jejich řešení

- motivace (Fibonacciho úloha, Hanojské věže), základní pojmy - (ne)lineární, (ne)homogenní; řešení (obecné, počáteční podmínky);
- řešení hom. lin. rek. vztahů pomocí charakteristické rovnice (násobné i komplexní kořeny);
- řešení nehom. lin. rek. vztahů se speciální pravou stranou.

Vytvořující funkce

- obyčejné/exponenciální vytvořující funkce, základní pojmy, příklady, operace s vytvořujícími funkcemi;
- aplikace na řešení rekurentních vztahů a jejich soustav;
- věžové polynomy, definice základních pojmů - šachovnice, zakázaná políčka; $r_k(C)$, $r(x; C)$, pravidla, aplikace principu IE.

Symetrická grupa

- permutace jako 1-1 zobrazení, násobení perm. (asoc., nekom., id, inverze) → symetrická grupa;
- cyklus, permutace jako součin disjunktních cyklů, počítaní s cykly; dihedrální grupa, Kleinova čtyřgrupa.

Pólyaova enumerační metoda

- motivace, cycle index polynom $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- Počet různých obarvení *n*-prvkové množiny se symetriemi danými permutační grupou pomocí *m* barev; (+ počet obarvení s předepsaným počtem jednotlivých barev).

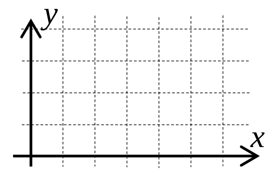
Zápočtové příklady

Elementární kombinatorika

- Spočtěte, kolika způsoby lze uspořádat různé objekty $\{a_1, \dots, a_{10}\}$ tak, že právě polovina z nich zůstává na svém místě. Doplňte druhý řádek následující tabulky příslušnými hodnotami odpovídajícími prvnímu řádku.

C^{5}_{-10}	C^{6}_{-6}	C^{8}_{-4}	C^{-7}_{-7}	C^{-8}_{8}	$\bar{C}^{5}_{6}$	$\bar{C}^{7}_{6}$	$\bar{C}^{6}_{6}$	$\bar{A}^{4}_{3}$	$\bar{A}^{3}_{5}$	A^{4}_{5}	A^{5}_{4}

- Uvažujte čtvercovou síť, ve které se lze pohybovat pouze pomocí kroků následujících typů: $A: [x, y] \rightarrow [x+1, y]$ nebo $B: [x, y] \rightarrow [x, y+1]$. Určete, kolika různými způsoby se lze dostat z bodu [0,0] do [11,11] tak, že nepřekročíte diagonálu a neprojdete žádným z bodů [5,5] nebo [8,8].



Binomická/multinomická věta; Newtonův vzorec

- Uvažujte rozvoj výrazu $\left(2x - \sqrt{3y}\right)^7$. Určete koeficienty u členů: a) x^2y^3, b) x^3y^2.
- Uvažujte rozvoj výrazu $\left(3u - \sqrt{2}v^2 + w - 5\sqrt[3]{x}\right)^6$. Určete koeficienty u členů: a) $uv^2w^2x^{2/3}$, b) u^2v^2wx.
- Uvažujte výraz $\sqrt[3]{5 - 4x^2}$. Určete koeficienty u členů: a) x^{10}, b) x^{11}.

Ve všech výše uvedených případech vypočtené koeficienty zjednodušte - racionální čísla uveďte do tvaru redukovaného zlomku, iracionální čísla ponechte ve tvaru s odmocninami.

Lineární rekurentní vztah/diferenční rovnice

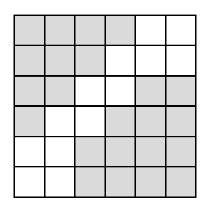
- Nalezněte řešení následujících rekurentních vztahů/diferenčních rovnic:
  a) $a_{n+3} + 3a_{n+2} - 4a_n = 0$, kde $a_0 = -1, a_1 = 6, a_2 = -2$.
  b) $\Delta^{(2)}a_n + 2\Delta a_n = a_n$, kde $a_1 = 5\sqrt{2}$.

Vytvořující funkce

- Určete posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou vytvořující funkcí $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{6x^3-19x^2+19x-6}$ (tj. nalezněte explicitní vyjádření a_n).
- Určete koeficient u členu x^5 v rozvinutém tvaru vytvořující funkce $f(x) = \frac{x^3-2x}{\sqrt{9-4x^2}}$.

Věžové polynomy

- Sestavte věžový polynom pro následující šachovnici.



Rozklady (diofantická rovnice, Stirlingova čísla)

- Určete počet celočíselných řešení diofantické rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13$, kde
  $$2 < x_1 \leq 7, -1 \leq x_2 < 6, -3 < x_3, 0 < x_4 \leq 6, -1 < x_5.$$
- Určete, kolika různými způsoby lze rozsadit deset různých osob ke čtyřem nerozlišitelným stolům (u každého stolu sedí alespoň jedna osoba), jestliže:
  a) Nezáleží na vzájemné pozici osob u stolu (tj. záleží pouze na tom, které osoby spolu sedí u jednoho stolu, lhostejno u kterého).
  b) Záleží na vzájemné pozici osob u stolu (tj. dvě rozsazení považujeme za různá, jestliže alespoň jedna osoba má u stolu různé sousedy).